MATEMÁTICA

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

TRIGONOMETRIA

ANÁLISE COMBINATÓRIA

PROBABILIDADE

Editora: Valley Editora Ltda.

Direção: João Vicente Strapasson Silveira Netto

Gestão: Vinícius Azambuja de Almeida

Coordenação Editorial: Camila Nunes da Rosa

Coordenação Pedagógica: Vanessa Bianchi Gatto

Autoria: Hector Giorgis (*in memoriam*)
João Vicente Strapasson Silveira Netto
Jackson Karpischin Ribas

Revisão técnica: Mateus Beltrame

Revisão Editorial: Alana Hoffmann
Caroline Guerra

Pesquisa Iconográfica*: Camila Nunes da Rosa

*As imagens identificadas com a sigla BID pertencem ao Banco de Imagem e Documentação da Valley Editora.

Programação Visual: Camile Weber
Sibele Righi Scaramussa

Capa: Camile Weber

Editoração Eletrônica: Camila Nunes da Rosa
Camile Webber
Juliana Facco Segalla
Sibele Righi Scaramussa

Ilustrações: Fabiano da Costa Alvares
Gabriel La Rocca Coser
Sibele Righi Scaramussa

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação – CIP

G499m

Giorgis, Hector (in memoriam)

Matemática: competência numérica, estatística e funções / Hector Giorgis (in memoriam), João Vicente Strapasson Silveira Netto, Jackso Karpischin Ribas; Revisão técnica Mateus Beltrame. Santa Maria: Valley Editora, 2024.

v. 2

150 p.

ISBN 978-65-89574-70-5

1. Matemática básica 2. Estatística 3. Funções 4. Porcentagem I. Título

CDU 51

Bibliotecária responsável Trilce Morales – CRB 10/2209

Coleção 2024

Sistema de Ensino

Comercialização e distribuição: NTRV Distribuidora

SUMÁRIO

Unidade 1

5 Progressão aritmética e progressão geométrica

Unidade 2

12 Trigonometria

Unidade 3

24 Introdução à Análise Combinatória

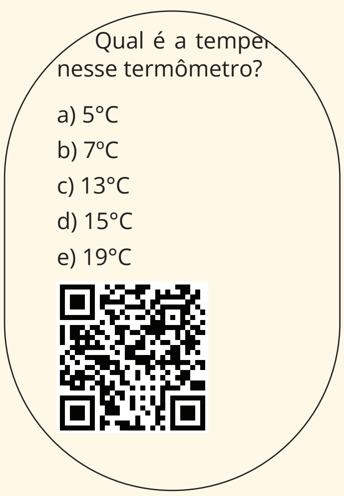
Unidade 4

29 Probabilidade

» Olá, aluno. Conheça seu livro!

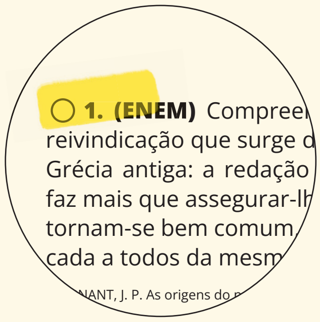
Ao longo deste livro, você encontrará ***QR Codes*** que levarão a **conteúdos extras para complementar seu estudo**. Entre eles, temos **aulas-pílula** em cada início de unidade, **vídeos diversos e resoluções de questões mais complexas.**

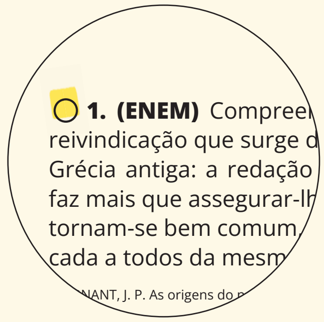
Para acessar esses conteúdos, você deverá fazer o *download* do **App Totem** na Play Store (em aparelhos Android) ou na Apple Store (em aparelhos Apple). Os *codes* não são acessíveis por outros leitores de *QR Code*. Em caso de dificuldades com o app, procure a secretaria do Curso.



Nas seções de testes, utilize os **marcadores** que acompanham a numeração da questão (◯) para **assinalar testes** mais importantes, que precisam ser revisados ou para tirar dúvidas. **Você pode criar sua própria legenda** atribuindo cores para cada destaque.

Sugestões:





Exemplos de legendas:

Questão fácil / Acertei / Não preciso revisar


Questão importante / Revisar / Acertei, mas tive dificuldades


Achei difícil / Errei, preciso refazer na próxima revisão / Levar para tirar dúvidas

MATEMÁTICA
UNIDADE 1

AULA-
-PÍLULA

» Progressão aritmética e progressão geométrica

• Sequências

Ao listar um número ao lado do outro, você está formando uma sequência. Vejamos o interessante exemplo em que cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma de seus dois antecessores:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

O primeiro termo é 1, o segundo também, o terceiro é 2 e assim por diante. Cada termo de uma sequência tem uma posição bem definida, e o símbolo $\mathbf{a_n}$ indica o termo que ocupa a posição **n** observada da esquerda para a direita. No exemplo acima temos:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 3,\ a_5 = 5,\ a_6 = 8,\ a_7 = 13,\ a_8 = 21, \text{ etc.}$$

Coelhos de Fibonacci

No século XIX, o matemático francês Edouard Lucas deu o nome de sequência de Fibonacci à lista (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...). Fibonacci foi o apelido dado ao italiano Leonardo de Pisa (1180-1250), que, entre outras coisas, foi autor da obra "Líber abaci", publicada em 1202. Um importante problema dessa obra apresenta como solução o décimo segundo termo dessa sequência.

Vejamos o problema:

"Em um pátio fechado, coloca-se um casal recém-nascido de coelhos. Supondo que em cada mês, a partir do segundo mês de vida, cada casal dá origem a um novo casal de coelhos, ao fim de um ano, quantos casais de coelhos estão no pátio?"

Resolução

Vamos organizar nosso raciocínio, supondo uma situação ideal na qual a data em que o primeiro casal de coelhos nasceu e foi colocado no pátio foi 1º de janeiro (poderia ser qualquer data). Assim, em 1º de fevereiro, ainda temos um casal de coelhos; em 1º de março, já são 2 casais (o inicial e o gerado por este em 1º de março); em 1º de abril, são 3 (o inicial e os gerados por este em 1º de março e 1º de abril) e assim por diante.

Para ver os 100 primeiros números da sequência de Fibonacci, você pode acessar: www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm41/os100.htm.

Observando que cada termo da sequência é a soma de seus dois antecessores, concluímos que, em 31 de dezembro (fim do ano), teremos 144 casais de coelhos no pátio.

• Progressões aritméticas

Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado com uma constante, que é chamada **razão**. A razão é representada pela letra **r**.

– Exemplos:

a) a sequência (2, 5, 8, 11, ...) é uma progressão aritmética de razão r = 3;

b) a sequência (3, 1, -1, -3, ...) é uma progressão aritmética de razão r = -2;

c) a sequência (4, 4, 4, 4, 4, ...) é uma progressão aritmética de razão r = 0.

Cálculo da razão

A razão de uma progressão aritmética é a diferença entre qualquer termo e o seu anterior.

r = termo qualquer - termo anterior

– Exemplos:

A razão da progressão aritmética (400, 417, 434, 451, ...) pode ser assim calculada:

r = 417 - 400 = 17

Relação entre os termos

Em uma progressão aritmética, para "avançar" um termo, somamos uma razão; para "avançar" dois termos, somamos duas vezes a razão, e assim sucessivamente.

$$a_1 \xrightarrow{+r} a_2 \xrightarrow{+r} a_3 \xrightarrow{+r} a_4 \xrightarrow{+r} a_5 \xrightarrow{+r} a_6 \xrightarrow{+r} a_7$$

– Exemplos:

$a_4 + r = a_5$

$a_4 + 2r = a_6$

$a_4 + 3r = a_7$

De forma geral, seguindo o raciocínio acima, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Em que:

a_k: termo de posição **k**;

r: razão;

a_n: termo de posição **n**.

APOIO AO TEXTO

1. Calcular o 8º, 20º e 100º termos da PA (2,6,10,...).

2. (UFSM 2024) A Amazônia Legal corresponde a mais da metade do território nacional, engloba oito estados inteiros e parte do estado do Maranhão. Entretanto, em 2022, sua população correspondia a pouco mais de um décimo da população brasileira.

Considere que o crescimento populacional da Amazônia Legal, entre os anos de 2012 e 2022, seja dado por uma progressão aritmética e que a população, nos referidos anos, tenha sido de 26,4 e 29,4 milhões, respectivamente.

Supondo que esse crescimento se mantenha nos próximos 10 anos, qual será, em milhões, a população da Amazônia Legal em 2030?

a) 31,5

b) 31,8

c) 32,4

d) 34,8

e) 35,4

3. (ENEM) A prefeitura de um pequeno município do interior decide colocar postes para iluminação ao longo de uma estrada retilínea, que inicia em uma praça central e termina numa fazenda na zona rural. Como a praça já possui iluminação, o primeiro poste será colocado a 80 metros da praça, o segundo, a 100 metros, o terceiro, a 120 metros, e assim sucessivamente, mantendo-se sempre uma distância de vinte metros entre os postes, até que o último poste seja colocado a uma distância de 1380 metros da praça. Se a prefeitura pode pagar, no máximo, por poste colocado, o maior valor que poderá gastar com a colocação desses postes é:

a) R$ 512.000,00.

b) R$ 520.000,00.

c) R$ 528.000,00.

d) R$ 552.000,00.

e) R$ 584.000,00.

Propriedades

Três termos consecutivos

Em uma PA, com exceção dos extremos, qualquer termo é igual à soma do termo anterior com o termo posterior dividido por 2.

Se a, b e c estão em PA, então $b = \dfrac{a + c}{2}$.

– Exemplos:

Na PA (2, 4, 6, 8, ...), temos: $4 = \dfrac{2 + 6}{2}$; $6 = \dfrac{4 + 8}{2}$; ...

TERMO MÉDIO

Em uma PA de número ímpar de termos, o termo do meio ou termo médio é igual à soma dos extremos dividida por 2; e também, é igual à soma de dois termos equidistantes dos extremos dividida por 2.

– Exemplo:

Na progressão aritmética de sete termos que segue, temos o seguinte:

(2, 5, 8, 11, 14, 17, 20)

TEE

TEE

Extremos

Sendo TM o termo médio, decorre que:

$$TM = 11 = \frac{2 + 20}{2} = \frac{5 + 17}{2} = \frac{8 + 14}{2}$$

APOIO AO TEXTO

4. Sabendo que x - 1, 2x + 3 e 4x + 4 formam, nessa ordem, uma PA, determine a razão.

5. (UFRGS) A sequência (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_{12}) forma uma progressão aritmética. Sabendo-se que $a_3 + a_{10} = 32$, o valor da expressão $\log_2 (a_1 + a_{12})^3$ é:

a) 10.
b) 15.
c) 21.
d) 26.
e) 32.

Soma dos termos da PA

Menino prodígio

Gottlieb Biermann, 1887/BID

Um fato curioso sobre o uso da fórmula que vamos apresentar ocorreu na Alemanha, por volta de 1787. O então menino Carl Friedrich Gauss resolveu um problema de aritmética com uma rapidez fora do comum, principalmente para uma turma de escola na qual os alunos tinham, em média, 10 anos. O professor deu o seguinte problema para a turma:

"Escrevam todos os números de 1 até 100 e depois apurem quanto dá a sua soma."

Gauss de pronto verificou que a soma era 5.050 e, em seu dialeto Braunschweig, disse "ligget se", que pode ser traduzido como "aqui está". Seus colegas ficaram resolvendo a questão por bastante tempo ainda e, ao final da aula, uma vez analisados os resultados, a maioria deles tinha errado a soma. Gauss, por sua vez, acertou, é claro.

Vejamos como ele pensou:

Soma 101

Soma 101

(1, 2, 3, 4, ..., 97, 98, 99, 100)

Soma 101

Soma 101

O menino viu 50 somas iguais a 101. Logo, raciocinou:

50 vezes 101 = 5.050.

Gauss apresentou essa e muitas outras proezas durante toda a vida. Não poderia ser diferente: em uma escala de QI sugerida por Lewis Terman, foi atribuído a ele o QI 240, sendo que a faixa compreendida entre 90 e 120 corresponde a uma inteligência normal e, acima de 140, à genialidade. Foi, assim, um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

FÓRMULA DA SOMA

É possível somar os **n** primeiros termos de uma progressão aritmética a partir da fórmula abaixo.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Em que:

a_1: primeiro termo da PA;

a_n: último termo que se quer somar;

n: número de termos da soma.

– *Exemplo:* $S_{10} = \dfrac{(a_1 + a_{10}) \,.\, 10}{2}$

Vejamos a dedução da fórmula da soma:

A soma dos **n** primeiros termos de uma progressão aritmética pode ser escrita assim:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ (igualdade 1)

Mas também pode ser escrita começando por a_n.

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$ (igualdade 2)

Somando as duas igualdades, temos:

$$2 \cdot S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)}_{\textbf{n} \text{ somas iguais a } (a_1 + a_n)}$$

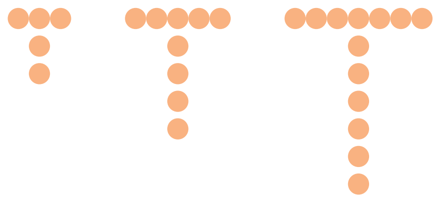
n somas iguais a $(a_1 + a_n)$

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

APOIO AO TEXTO

6. (UFSM) Tisiu ficou sem parceiro para jogar bolita (bola de gude); então pegou sua coleção de bolitas e formou uma sequência de "T" (a inicial de seu nome), conforme a figura:



Supondo que o guri conseguiu formar 10 "T" completos pode-se, seguindo o mesmo padrão, afirmar que ele possuía:

a) mais de 300 bolitas.
b) pelo menos 230 bolitas.
c) menos de 220 bolitas.
d) exatamente 300 bolitas.
e) exatamente 41 bolitas.

7. (UFSM) Distribuem-se 105 bolas sobre linhas paralelas, com 1 bola na 1ª linha, 2 bolas na 2ª linha, 3 bolas na 3ª linha e assim por diante. Sabendo que não sobrará nenhuma bola, o número de linhas que serão formadas é.

a) 11
b) 12
c) 13
d) 14
e) 15

Anotações:

• Progressões geométricas

Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência, na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao seu anterior multiplicado por uma constante, que é chamada **razão**. A razão é representada pela letra **q**.

– *Exemplos:*

a) a sequência (2, 6, 18, 54, ...) é uma progressão geométrica de razão q = 3;

b) a sequência (5, -10, 20, -40, ...) é uma progressão geométrica de razão q = -2;

c) a sequência (4, 4, 4, 4, 4, ...) é uma progressão geométrica de razão q = 1.

Cálculo da razão

A razão de uma progressão geométrica é o quociente entre qualquer termo e o seu anterior.

$$q = \frac{\text{termo qualquer}}{\text{termo anterior}}$$

– *Exemplo:*

A razão da progressão geométrica (3, 12, 48, ...) pode ser assim calculada:

$$q = \frac{12}{3} = 4$$

Relação entre os termos

Em uma progressão geométrica, para avançar um termo, multiplicamos uma razão; para avançar dois termos, multiplicamos duas vezes a razão e, assim, sucessivamente.

$$a_1 \xrightarrow{\times q} a_2 \xrightarrow{\times q} a_3 \xrightarrow{\times q} a_4 \xrightarrow{\times q} a_5 \xrightarrow{\times q} a_6$$

– *Exemplos:*

$a_4 \cdot q = a_5$

$a_4 \cdot q^2 = a_6$

$a_4 \cdot q^3 = a_7$

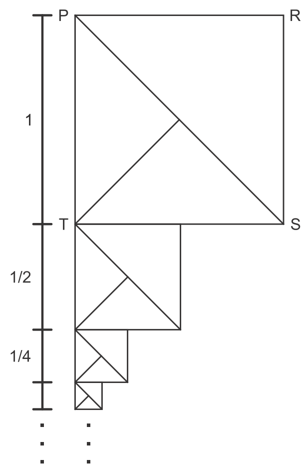
De forma geral, seguindo o raciocínio acima, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

APOIO AO TEXTO

8. Calcular o 8º e 100º termos da PG(2,4,8,...).

9. (ENEM) O artista gráfico holandês Maurits Cornelius Escher criou belíssimas obras nas quais as imagens se repetiam, com diferentes tamanhos, induzindo ao raciocínio de repetição infinita das imagens. Inspirado por ele, um artista fez um rascunho de uma obra na qual propunha a ideia de construção de uma sequência de infinitos quadrados, cada vez menores, uns sob os outros, conforme indicado na figura.



O quadrado PRST, com lado de medida 1, é o ponto de partida. O segundo quadrado é construído sob ele tomando-se o ponto médio da base do quadrado anterior e criando-se um novo quadrado, cujo lado corresponde à metade dessa base. Essa sequência de construção se repete recursivamente. Qual é a medida do lado do centésimo quadrado construído de acordo com esse padrão?

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{99}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{97}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-98}$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-99}$

PROPRIEDADES

Três termos consecutivos

Em uma PG, com exceção dos extremos, qualquer termo ao quadrado é igual ao produto do termo anterior pelo termo posterior.

Se a, b e c estão em PA, então $b^2 = a \cdot c$.

– *Exemplo:*

Na PG (2, 6, 18, 54, ...), temos:

$6^2 = 2 \cdot 18$; $18^2 = 6 \cdot 54$; ...

TERMO MÉDIO

Em uma PG com número ímpar de termos, o termo médio ao quadrado é igual ao produto dos extremos e, também, é igual ao produto de dois termos equidistantes dos extremos.

– *Exemplo:*

Na progressão geométrica de sete termos que segue, temos o seguinte:

(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64)

TEE

TEE

Extremos

Sendo TM o termo médio, decorre que:

$TM^2 = 8^2 = 1 \cdot 64 = 2 \cdot 32 = 4 \cdot 16$

APOIO AO TEXTO

10. Se os números x – 6, x – 4 e x formam, nessa ordem, uma PG, calcule a razão dessa PG.

Soma dos termos da PG

Pedido de Sissa

Muitas vezes, somar termos de uma progressão geométrica pode ser, no mínimo, curioso.

Conta a lenda que o jogo de xadrez foi inventado na Índia para agradar o soberano rei Shirham. O súdito Sissa Ben Dahir foi o inventor desse jogo e, como recompensa, pediu ao rei algo aparentemente simples. Eis o pedido: quero 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos pela segunda, 4 pela terceira e, assim, sucessivamente, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa. Como o tabuleiro do xadrez tem 64 casas, a quantidade total de grãos de trigo que o servo pediu era exatamente igual à soma dos 64 primeiros termos da progressão geométrica 1, 2, 4, 8, ...

O interessante é que o resultado dessa soma é o estrondoso número 18.446.744.073.709.551.615. O professor Geraldo Ávila, da Unicamp, em 1992, fez algumas considerações sobre esse número em seu livro *Introdução às funções e à derivada*. O autor cita a produção brasileira de trigo em 1992, a produção mundial de trigo nesse mesmo ano e coloca ainda outros dados curiosos. Conclusão: afirma o professor que a produção de trigo, desde o início da agricultura até 1992, não seria suficiente para atender ao pedido de Sissa.

Luís Dantas/BID

FÓRMULA DA SOMA

É possível somar os **n** primeiros termos de uma progressão geométrica a partir da fórmula abaixo.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Em que:

a_1: primeiro termo da PA;

q: razão;

n: número de termos da soma.

– *Exemplo:* $S_7 = \dfrac{a_1 \,.\, (q^7 - 1)}{q - 1}$

Curiosidade

Vejamos a dedução da fórmula da soma:

A soma dos **n** primeiros termos de uma PG é dada por:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \quad \text{(igualdade 1)}$$

Agora vamos multiplicar todos os termos pela razão **q**:

$$q \cdot S_n = a_1q + a_2q + a_3q + ... + a_nq$$

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_nq \quad \text{(igualdade 2)}$$

Subtraindo (1) e (2), teremos:

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_nq \qquad (2)$$

$$-S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \qquad (1)$$

$$q \cdot S_n - S_n = a_nq - a_1$$

$$S_n \cdot (q - 1) = a_nq - a_1$$

$$S_n = \frac{a_nq - a_1}{q - 1} \qquad (3)$$

Mas $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Substituindo a_n em (3), obtemos:

$$S_n = \frac{a_1q^{n-1} \cdot q - a_1}{q - 1} = \frac{a_1q^{n-1+1} - a_1}{q - 1} = \frac{a_1q^n - a_1}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Logo:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

APOIO AO TEXTO

11. (UFSM) Um pintor foi contratado para pintar uma casa nos dez dias que antecedem o Natal. O dono da casa ofereceu R$ 2,00 no 1º dia e, nos dias seguintes, o dobro do que o pintor recebera no dia anterior. O pintor recusou a proposta. Se ele tivesse aceitado, ele receberia pelos 10 dias de trabalho:

a) R$ 110,00

b) R$ 220,00

c) R$ 1024,00

d) R$ 2046,00

e) R$ 2048,00

LIMITE DA SOMA

O limite da soma dos termos de uma PG infinita, com $-1 < q < 1$, é dado por:

$$\lim S = \frac{a_1}{1 - q}$$

Em que:

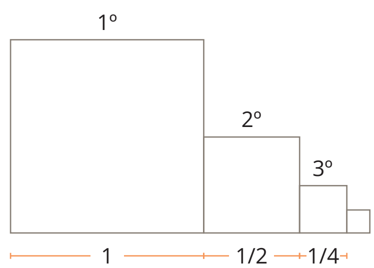
a_1: primeiro termo da progressão geométrica;

q: razão da progressão.

APOIO AO TEXTO

12. Calcule o limite da soma dos termos da PG (4, 2, 1, ...).

13. (UFSM) Na figura, o lado do primeiro quadrado é 1 e cada quadrado, a partir do segundo, tem lado igual à metade do lado do seu antecessor. Supondo que essa sequência continue indefinidamente, a soma das áreas dos infinitos quadrados é igual a



a) 5/4.

b) 4/3.

c) 2.

d) 5/2.

e) 3.

AULA-
-PÍLULA

MATEMÁTICA

UNIDADE 2

» Trigonometria

• Origem da trigonometria

Historiadores da matemática acreditam que o início do desenvolvimento da trigonometria tenha ocorrido no mundo antigo, com os egípcios e babilônios, por volta do século IV ou V a.C., período em que as necessidades práticas geradas pelas medições de terras, pela astronomia e pelas navegações ficaram evidentes nos documentos históricos desses dois povos. A palavra trigonometria significa medida das partes de um triângulo; hoje, porém, sabemos que essa parte da matemática não é apenas estudada nos triângulos, mas também nos círculos, nas esferas, etc.

Mesmo que o início da trigonometria tenha ocorrido cinco séculos antes de Cristo, foi somente por volta de 180 a 125 a.C. que um homem recebeu os méritos da criação. Trata-se do astrônomo Hiparco de Niceia, que é reconhecido como "o pai da trigonometria". O que deve ter sido a primeira tábua trigonométrica é obra de Hiparco. Ele foi além: colaborou com o melhoramento de dados astronômicos que possibilitaram conhecer melhor a duração do mês e do ano. Descobriu também a precessão dos equinócios.

Entretanto, foi Ptolomeu de Alexandria (150 d.C.), considerado o maior astrônomo da Antiguidade, que escreveu a obra mais importante contendo aplicações da trigonometria. Com 13 livros, a obra "Syntaxis Mathematica" foi chamada, na Arábia, de "Almagesto", que significa "o maior". Para entender a grandiosidade do "Almagesto", basta dizer que, durante seis séculos, essa obra foi guia de consulta para astrônomos do mundo inteiro.

Por volta de 400 anos d.C., surgiram novos personagens nessa curiosa história: os hindus (ou indianos). Esse povo promoveu grande desenvolvimento na trigonometria. Enquanto os gregos mantinham uma trigonometria apenas geométrica, os hindus propuseram uma trigonometria de natureza aritmética. Criou-se, então, entre os matemáticos árabes, uma bipolarização entre as trigonometrias grega e hindu. O conflito só terminou entre 850 e 929, quando o matemático árabe Al-Battani adotou a trigonometria hindu, introduzindo a ideia de se trabalhar com um círculo de raio unitário.

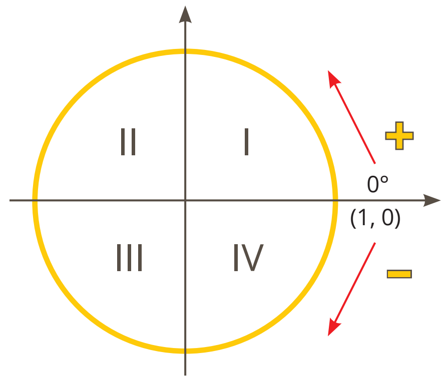
Já na Idade Moderna, foi a vez de o Ocidente colaborar com o desenvolvimento da trigonometria. De necessidades, como a Cartografia (devido à expansão marítima) e a Topografia, surgiram inovações nessa área.

Hoje, porém, estudamos uma trigonometria simbólica e um pouco diferente daquela a que fizemos referência até o parágrafo anterior. A atual trigonometria é o resultado de uma longa caminhada da humanidade que um dia construiu as pirâmides egípcias, calculou a medida do raio da Terra, fez medições inacessíveis e depois assistiu à criação da simbologia atual da matemática.

• Circunferência trigonométrica

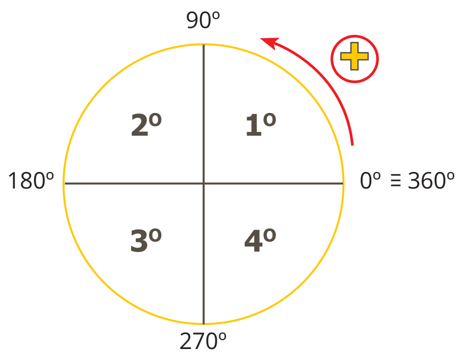
A circunferência trigonométrica pode ser compreendida como uma circunferência traçada no plano cartesiano (conforme a figura ao lado), com as seguintes propriedades:

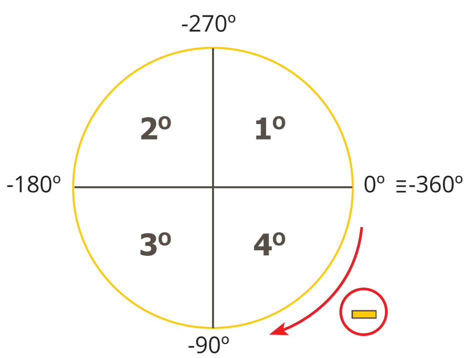
- o raio é unitário;
- adota-se como origem dos arcos o ponto (1, 0);
- possui dois sentidos para os arcos: o sentido anti-horário, que é convencionado como positivo, e o sentido horário, que é o sentido negativo;
- é dividida em quadrantes, numerados conforme a figura ao lado.



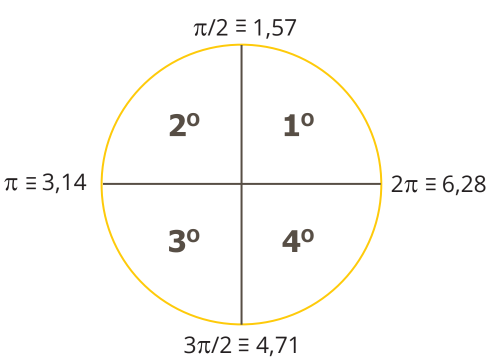
• Medida de arcos

Graus

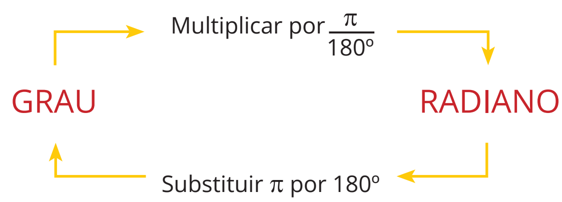




Radianos



• Transformação de arcos



APOIO AO TEXTO

1. (ENEM) Nos *X-Games Brasil*, em maio de 2004, o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado “Mineirinho”, conseguiu realizar a manobra denominada “900”, na modalidade *skate* vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominação “900” refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a:

a) uma volta completa.

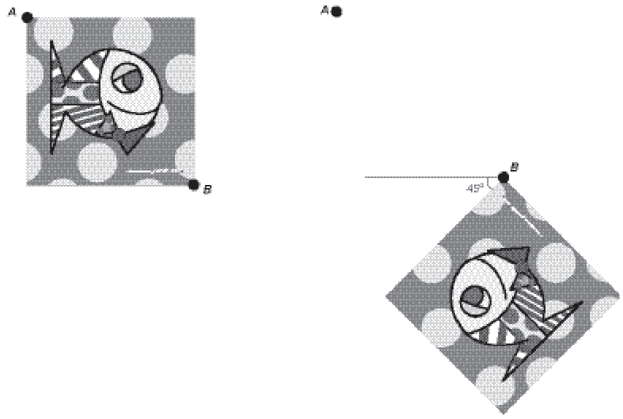
b) uma volta e meia.

c) duas voltas completas.

d) duas voltas e meia.

e) cinco voltas completas.

2. (ENEM) A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada O peixe, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos e Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu, girando rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura, formando um ângulo de 45° com a linha do horizonte.



Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a 360°. A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de:

a) 90° no sentido horário.

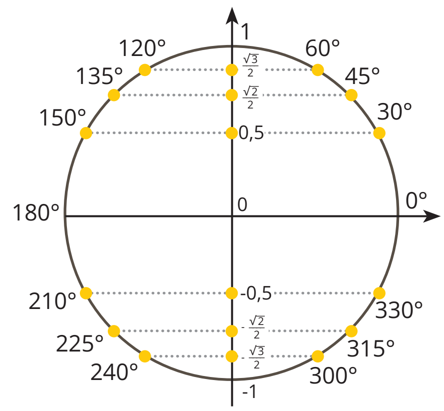
b) 135° no sentido horário.

c) 180° no sentido anti-horário.

d) 270° no sentido anti-horário.

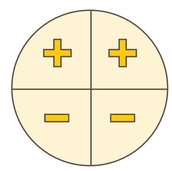
e) 315° no sentido horário.

Seno



Compreendendo o conceito de seno (na verdade não se trata de uma nova definição de seno, mas, sim, um modelo físico que também permitirá o estudo do seno para arcos maiores que 180º), podemos tirar conclusões imediatas da circunferência trigonométrica, sem a necessidade de decorá-las. Vejamos:

Sinal



Variação

$-1 \leq \text{sen}\ \alpha \leq 1$

Função seno

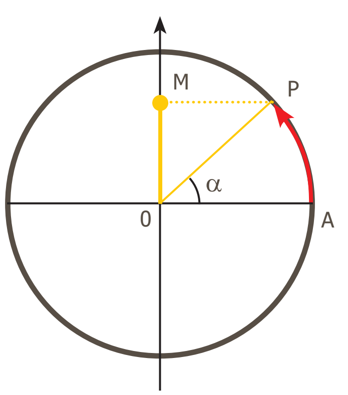
$f(x) = \text{sen}\ x$

x	f(x) = sen x
-90º	
0º	
90º	
180º	
270º	
360º	

• Seno

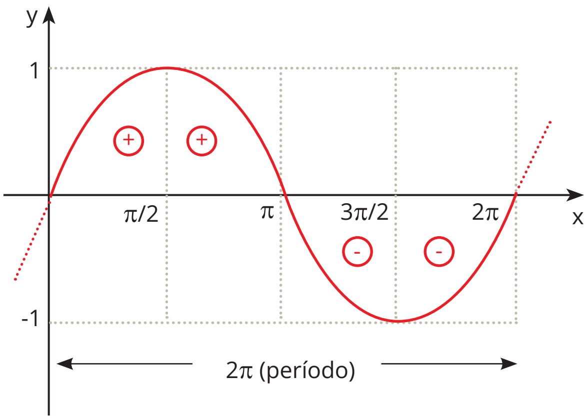
No sistema de coordenadas cuja origem é o centro da circunferência trigonométrica e o ponto A = (1, 0) é a origem dos arcos, definimos o sen α como a **ordenada** (valor do y) do ponto P, como indicado na figura abaixo.

Representação geométrica



$\text{sen}\ \alpha = M$

GRÁFICO (SENOIDE)

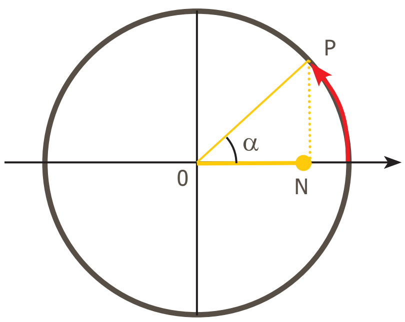


$D_{(f)} = IR$ $\qquad$ $Im_{(f)} = [-1, 1]$

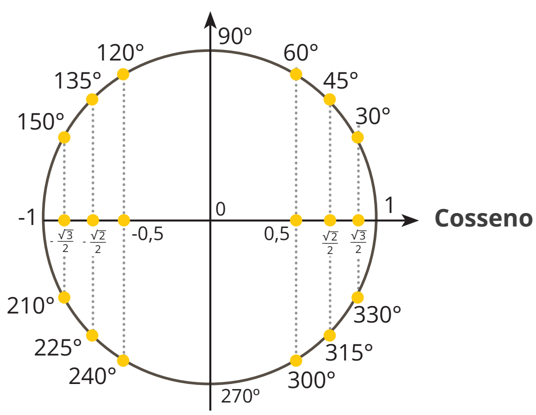
- ## Cosseno

No sistema de coordenadas cuja origem é o centro da circunferência trigonométrica e o ponto A = (1, 0) é a origem dos arcos, definimos o cos α como a **abscissa** (valor do x) do ponto P, como indicado na figura abaixo.

Representação geométrica

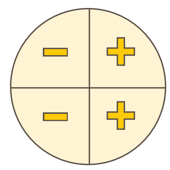


$\cos \alpha = N$



Aqui, de modo análogo ao que vimos para o seno, compreendendo o conceito de cosseno, podemos tirar conclusões imediatas da circunferência trigonométrica, sem a necessidade de decorá-las. Vejamos:

Sinal



Variação

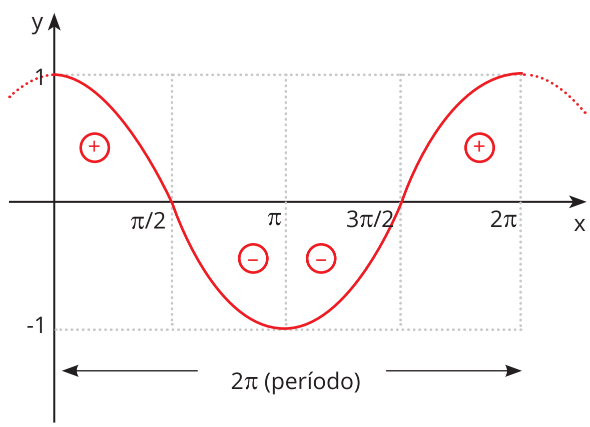
$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

Função cosseno

$f(x) = \cos x$

x	f(x) = cos x
-90°	
0°	
90°	
180°	
270°	
360°	

GRÁFICO (COSSENOIDE)



$D_{(f)} = IR$ $\qquad$ $Im_{(f)} = [-1, 1]$

• Funções Trigonométricas

$$f(x) = a + b\,sen(cx + d)$$

OU

$$f(x) = a + b\cos(cx + d)$$

Anotações:

• Período

Dadas as funções:

f(x) = sen (**c**x) e f(x) = cos (**c**x)

$$P = \frac{2\pi}{c}$$

Anotações:

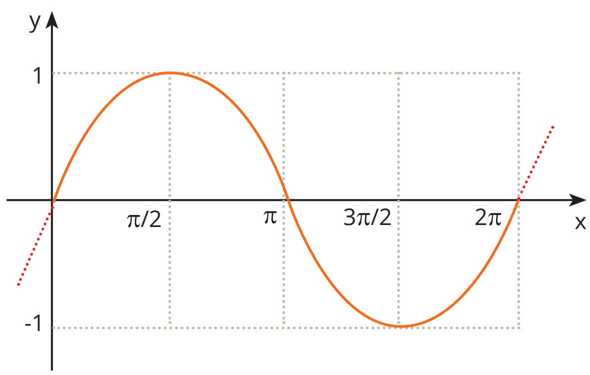
• Imagem

Anotações:

GRÁFICO

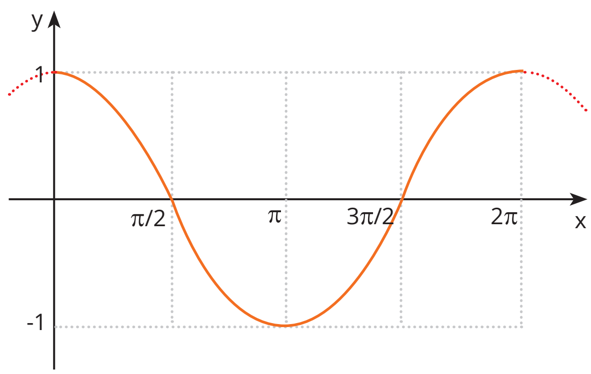
Função Seno

$$f(x) = sen\ x$$



Função Cosseno

$$f(x) = \cos x$$



Anotações:

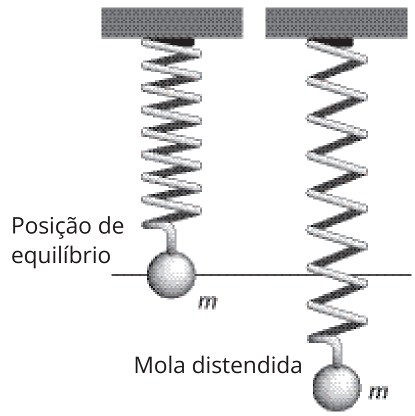
APOIO AO TEXTO

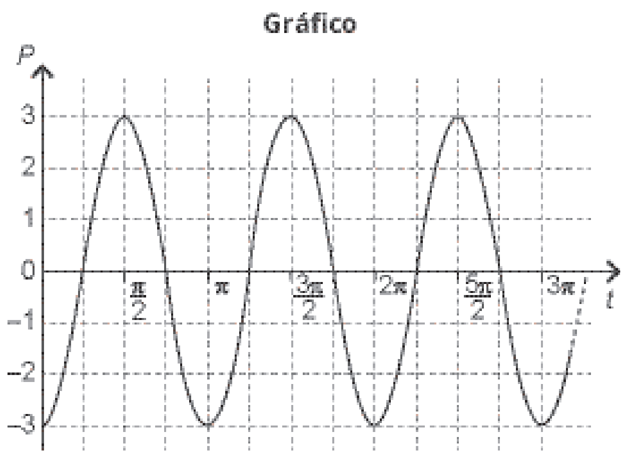
3. Calcule a imagem, o período e esboce o gráfico da função $f(x) = 3 + 2\text{sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right)$

4. (UFRGS) Considere a função real de variável real $f(x) = 3 - 5\text{sen}(2x + 4)$. Os valores de máximo, mínimo e o período de f(x) são, respectivamente:

a) –2, 8, π.
b) 8, –2, π.
c) π, –2, 8.
d) π, 8, –2.
e) 8, π, –2.

5. (ENEM-2021) Uma mola é solta da posição distendida conforme a figura. A figura à direita representa o gráfico da posição P (em cm) da massa m em função do tempo t (em segundo) em um sistema de coordenadas cartesianas. Esse movimento periódico é descrito por uma expressão do tipo $P(t) = \pm A\cos(\omega t)$ ou $P(t) = \pm A\text{sen}(\omega t)$ em que $A>0$ é a amplitude de deslocamento máximo e ω é a frequência, que se relaciona com o período T pela fórmula $\omega = \frac{2\pi}{T}$ Considere a ausência de quaisquer forças dissipativas.





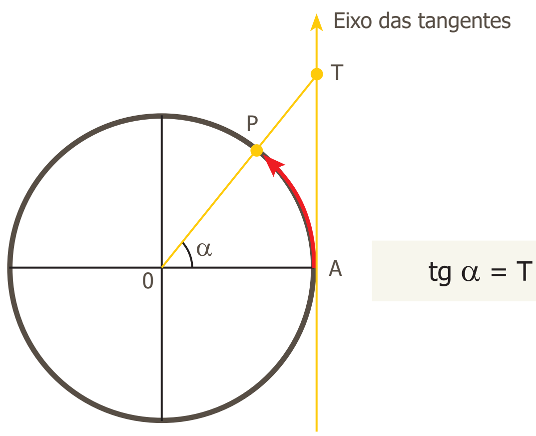
A expressão algébrica que representa as posições P(t) da massa m, ao longo do tempo, no gráfico, é:

a) –3 cos (2t)
b) –3 sen (2t)
c) 3 cos (2t)
d) –6 cos (2t)
e) 6 sen (2t)

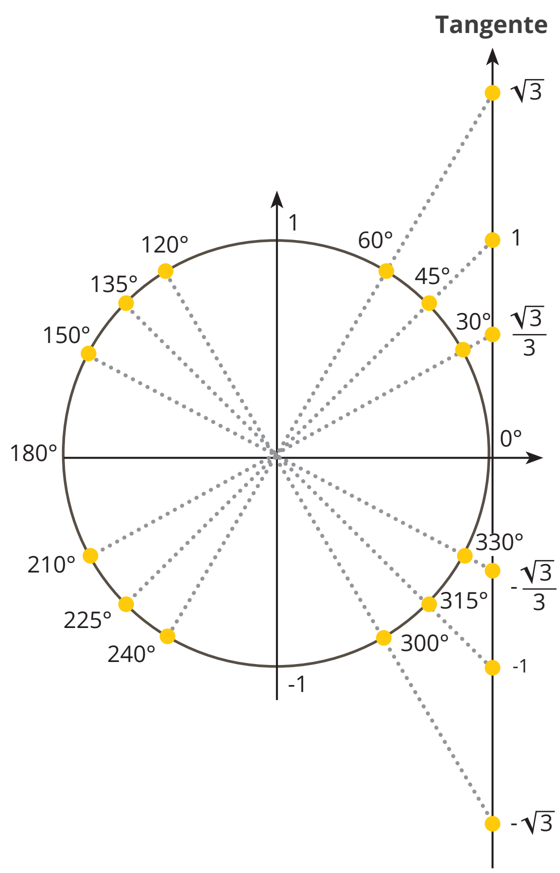
• Tangente

No sistema de coordenadas cuja origem é o centro da circunferência trigonométrica e o ponto A = (1, 0) é a origem dos arcos, definimos a tg α como a **ordenada** do ponto T, obtido a partir da intersecção da reta OP com o eixo das tangentes, indicado na figura abaixo.

Representação geométrica



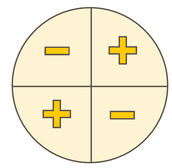
tg α = T



Valores

tg 0° = 0
tg 90° = ∄
tg 180° = 0
tg 270° = ∄
tg 360° = 0

Sinal



Variação

O resultado da tangente de um arco não está limitado entre -1 e 1, como acontece com o seno e o cosseno. Esse resultado pode ser qualquer valor real.

Função tangente f(x) = tg (mx)

Período P = π/m

Domínio arco $\neq \pi/2 + k\pi$

APOIO AO TEXTO

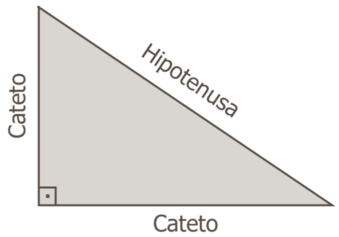
6. Determine o período e o domínio da função definida abaixo:

$f(x) = 2 + tg\left(\frac{x}{3} + \pi\right)$

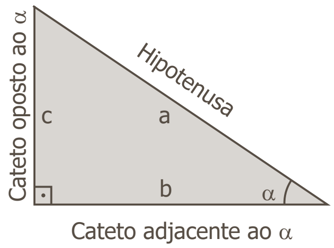
Período	Domínio

• Triângulo retângulo

Sendo α a medida de um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, definimos as seguintes razões trigonométricas:



Tem um ângulo de 90°.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{Cateto oposto ao } \alpha}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Cateto adjacente ao } \alpha}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{Cateto oposto ao } \alpha}{\text{Cateto adjacente ao } \alpha}$$

Sendo $\alpha + \beta = 90°$, têm-se as seguintes relações:

$$\text{sen}\ \alpha = \cos \beta \quad \text{e} \quad \text{tg}\ \alpha = 1/\text{tg}\ \beta$$

Valores usuais em prova

	Ângulos	30º	45º	60º
Valores	Valor do seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
	Valor do cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
	Valor da tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

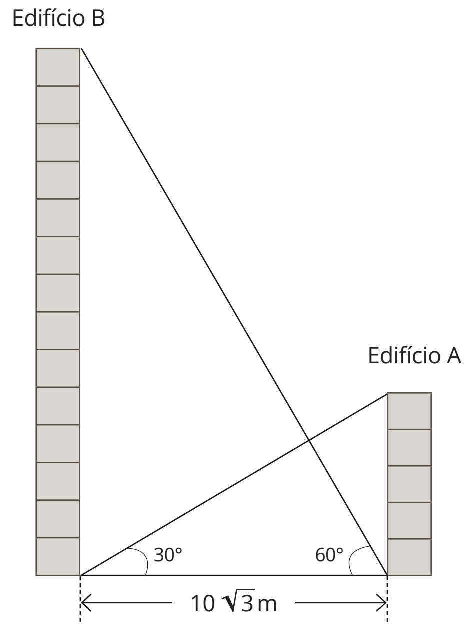
APOIO AO TEXTO

7. (UFSM) Um observador, com o auxílio de um teodolito (instrumento utilizado para medir ângulos), mede inicialmente o ângulo do pé do edifício A ao topo do edifício B, como apresenta a figura. Após, mede o ângulo do pé do edifício B ao topo do edifício A. Sabendo-se que a distância entre os dois edifícios é de $10\sqrt{3}$ m, pode-se afirmar que:

I. a soma das alturas do edifício A a do edifício B é de 40 m.

II. a distância entre os topos dos edifícios é de $10\sqrt{7}$ m.

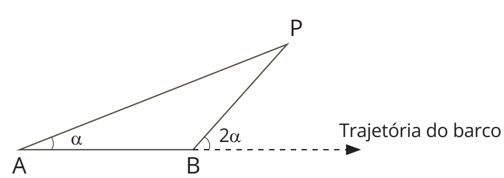
III. a altura do edifício A é de 30m.



Está(ao) correta(s) a(s) afirmativa(s):

a) I apenas
b) II apenas
c) I e II apenas
d) III apenas
e) I, II e III

8. (ENEM) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual a fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo α = 30° e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2000m . Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

a) 1000 m
b) 1000 $\sqrt{3}$ m
c) 2000 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m
d) 2000 m
e) 2000 $\sqrt{3}$ m

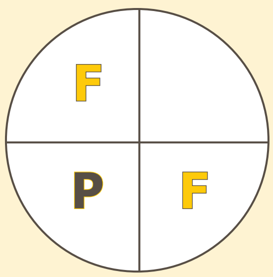
9. Uma árvore, partida pelo vento, mantém seu tronco perpendicularmente ao solo, formando um triângulo retângulo. Se a parte quebrada faz ângulo de 60º com o solo e se o topo da árvore está agora distanciado 10 m de sua base, qual era aproximadamente a altura original da árvore?

a) 20 m
b) 10 $\sqrt{3}$ m
c) 40 $\sqrt{3}$ m
d) 10 (2 + $\sqrt{3}$) m
e) 20 (1 + $\sqrt{3}$) m

• Redução ao 1º quadrante

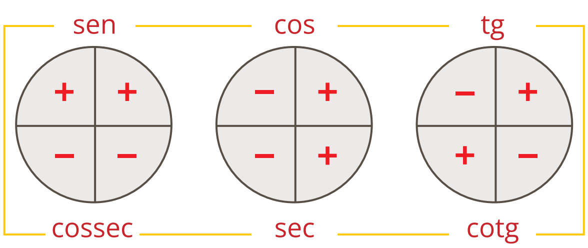
Para reduzir um arco qualquer pertencente ao 2º, 3º e 4º quadrantes a um correspondente arco no 1º quadrante, com o mesmo valor da razão trigonométrica (em módulo), faz-se o seguinte:

- **1.** localize o quadrante em que está o arco a ser reduzido;
- **2.** verifique o sinal da razão trigonométrica no referido quadrante;
- **3.** faça a redução do arco conforme abaixo.



2º = Quanto falta para 180º.
3º = Quanto passou de 180º.
4º = Quanto falta para 360º.

SINAIS NOS QUADRANTES



RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Valores	Ângulos	30º	45º	60º
	Valor do seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
	Valor do cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
	Valor da tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

APOIO AO TEXTO

10. Determine o valor de:

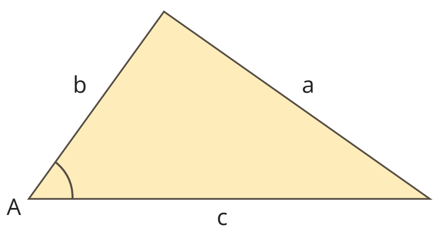
a) cos 135°   b) sen 210°   c) tg 300°

• Triângulos quaisquer

Na resolução de problemas em triângulos quaisquer, aplicaremos duas leis importantes:

Lei dos cossenos

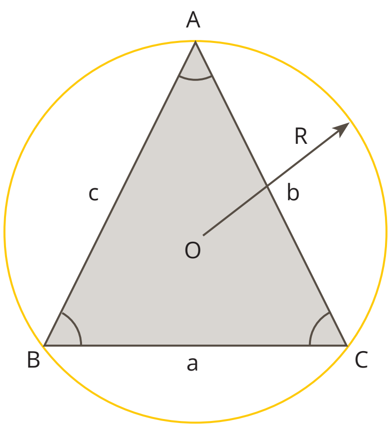
Normalmente, utiliza-se a lei dos cossenos quando são fornecidos dois lados e um ângulo.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

Lei dos senos

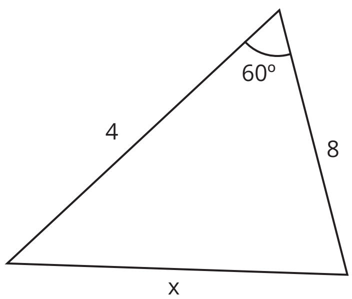
Normalmente, utiliza-se a lei dos senos quando são fornecidos dois ângulos e um lado do triângulo.



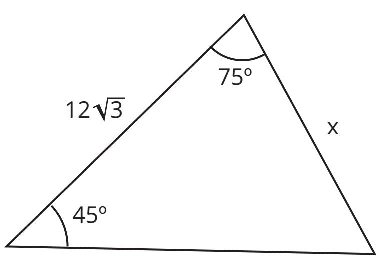
$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2R$$

APOIO AO TEXTO

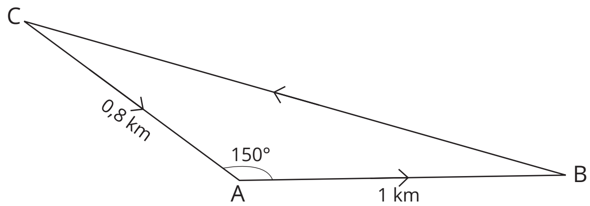
11. Calcule x no triângulo.



12. Calcule x no triângulo.



13. (UFSM) A caminhada é uma das atividades físicas que, quando realizada com frequência, torna-se eficaz na prevenção de doenças crônicas e na melhoria da qualidade de vida. Para a prática de uma caminhada, uma pessoa sai do ponto A, passa pelos pontos B e C e retorna ao ponto A, conforme trajeto indicado na figura. Dado: $\sqrt{3} = 1,7$



Quantos quilômetros ela terá caminhado, se percorrer todo o trajeto?

a) 2,29.

b) 2,33.

c) 3,16

d) 3,50

e) 4,80.

• Operações com arcos

Questões que envolvem os ângulos 15°, 75°, 105° etc.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE ARCOS

As fórmulas abaixo possibilitam o cálculo do seno, do cosseno e da tangente de diversos ângulos a partir dos ângulos de 30°, 45° e 60°. É o caso do seno de 15° e do seno de 75°, por exemplo, que podem ser obtidos do seguinte modo:

- sen 15° = sen (45° - 30°)
- sen 75° = sen (45° + 30°)

Vejamos as fórmulas:

$$\textbf{sen (a + b)} = \text{sen a} \cdot \cos \text{b} + \cos \text{a} \cdot \text{sen b}$$

$$\textbf{sen (a - b)} = \text{sen a} \cdot \cos \text{b} - \cos \text{a} \cdot \text{sen b}$$

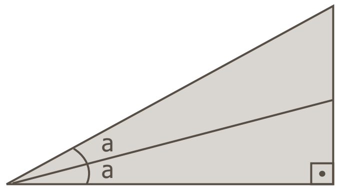
$$\textbf{cos (a + b)} = \cos \text{a} \cdot \cos \text{b} - \text{sen a} \cdot \text{sen b}$$

$$\textbf{cos (a - b)} = \cos \text{a} \cdot \cos \text{b} + \text{sen a} \cdot \text{sen b}$$

$$\textbf{tg (a + b)} = \frac{\text{tg a} + \text{tg b}}{1 - \text{tg a} \cdot \text{tg b}}$$

$$\textbf{tg (a - b)} = \frac{\text{tg a} - \text{tg b}}{1 + \text{tg a} \cdot \text{tg b}}$$

Questões que envolvem o que chamamos de "arco duplo"



DUPLICAÇÃO DE ARCOS

Outro recurso para obter o seno, o cosseno e a tangente de diversos arcos é a relação de **arco duplo**. Por exemplo, a partir da tangente de 5°, você pode chegar à tangente de 10°, 20°, 40° e assim por diante.

Vejamos as identidades:

$$\text{sen (2a)} = 2 \cdot \text{sen a} \cdot \cos \text{a}$$

$$\cos \text{(2a)} = \cos^2 \text{a} - \text{sen}^2 \text{a}$$

$$\text{tg (2a)} = \frac{2 \cdot \text{tg a}}{1 - \text{tg}^2 \text{a}}$$

Importante

As fórmulas acima podem ser deduzidas a partir das fórmulas da adição de arcos. Acompanhe o cálculo no caso do seno:

sen(2a) = sen(a + a) = sen a · cos a + cos a · sen a = 2 · sen a · cos a

A dedução do cosseno e da tangente do arco **2a** fica a cargo de cada estudante.

Anotações:

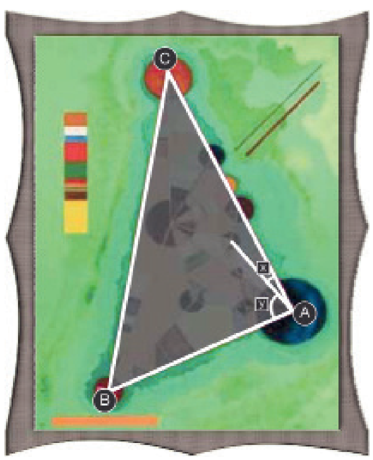
APOIO AO TEXTO

14. Calcule:

a) sen 105º

b) sen (π + x)

15. (UFSM) O pioneiro do abstracionismo nas artes plásticas, Wassily Kandisnky, nasceu em Moscou, em 1866. Optou inicialmente pela música, o que refletiu em seu trabalho como pintor, conferindo-lhe noções essenciais de harmonia. A figura a seguir, adaptada de um quadro de Kandisnky, apresenta um triângulo ABC retângulo em A.



Sabendo-se que a diferença entre os ângulos x e y é 60º, o valor de *sen x* + *sen y* é:

a) $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

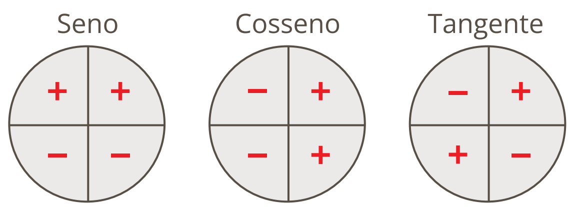
e) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Equações trigonométricas

Na resolução de uma equação trigonométrica, tenha em mente:

	Ângulos	30º	45º	60º
Valores	Valor do seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
	Valor do cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
	Valor da tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

SINAL



APOIO AO TEXTO

16. Determine a solução geral das equações abaixo:

a) sen x = $\frac{1}{2}$

b) cos x = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

17. (UFSM) Em certa região, a temperatura média mensal, em ºC, varia de acordo com a lei $f(t) = 20 + 8\cos\frac{\pi}{6}(t - 1)$, em que t é medido em mês, t = 1 corresponde ao mês de janeiro e t = 2, ao mês de fevereiro, e assim por diante.

Assinale V nas afirmativas verdadeiras e F nas falsas.

( ) A temperatura média mensal máxima é de 28ºC

( ) O período da função y = f(t) é igual a 6

( ) A temperatura média mensal é igual a 16ºC nos meses de maio e setembro.

( ) A temperatura média mensal mínima é de 12ºC.

A sequência correta é:

a) V - F - F - V

b) V - V - F - F

c) V - F - V - V

d) F - F - V - F

e) F - V - V - F

AULA-
-PÍLULA

MATEMÁTICA
UNIDADE 3

» Introdução à Análise Combinatória

A análise combinatória visa desenvolver estratégias para contar o número de agrupamentos que são formados com os elementos de um conjunto, agrupados sob certas condições. É uma área da matemática que estimula o pensar mediante a resolução de problemas.

Conta a história que Arquimedes, há 2200 anos, escreveu um tratado sobre o assunto, chamado *Stomachion*. Entretanto, o desenvolvimento significativo dessa parte da matemática ocorreu somente 1700 anos depois, com o italiano Niccolò Fontana (1500-1557), conhecido por "Tartaglia", e os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662).

• Fatorial

É o produto dos números naturais desde o número dado até 1. A notação **n!** representa o fatorial do número **n** e foi introduzida, em 1808, por Christian Kramp.

– Exemplo:

a) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

b) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

c) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

d) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

e) $2! = 2 \cdot 1 = 2$

Por definição: $0! = 1$
$1! = 1$

APOIO AO TEXTO

1. Calcule:

a) $\dfrac{10!}{8!} =$

b) $\dfrac{6!}{3!} =$

c) $\dfrac{10! + 9!}{9!} =$

• Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo (PFC)

O PFC diz que, se um evento A tem **x** possibilidades distintas de ocorrer e um evento B tem **y** possibilidades distintas de ocorrer, então o total de possibilidades de ocorrerem A e B simultaneamente é: $\mathbf{x \cdot y}$

Dica

E → Multiplica

OU → Soma

Usaremos o PFC em problemas que permitem repetição de elemenos no agrupamento.

APOIO AO TEXTO

2. Roberto está no aeroporto e pretende visitar o centro histórico da cidade. Partindo do aeroporto, existem 3 linhas de metrô que levam ao shopping e 4 ônibus que se deslocam do shopping para o centro histórico. De quantas maneiras Roberto pode sair do aeroporto e chegar até o centro histórico passando pelo shopping?

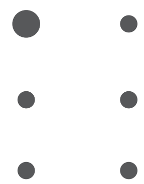
3. Um restaurante possui em seu cardápio 2 tipos de entradas, 3 tipos de pratos principais e 2 tipos de sobremesas. Quantos menus poderiam ser montados para uma refeição com uma entrada, um prato principal e uma sobremesa?

4. (UFSM) No código Morse, as "letras" são ponto e traço. Pode –se afirmar que o número de palavras de até 5 "letras" que podem ser formadas, é igual a:

a) 10
b) 20
c) 32
d) 41
e) 62

5. (ENEM) A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caractere é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais.

Por exemplo, a letra **A** é representada por:



O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é:

a) 12
b) 31
c) 36
d) 63
e) 720

6. Uma bandeira possui quatro listras, e duas listras adjacentes não podem ter a mesma cor. São disponíveis as cores: vermelho, verde e azul. Quantas são as possibilidades de pintar essa bandeira?

7. Quantos números de quatro algarismos podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5?

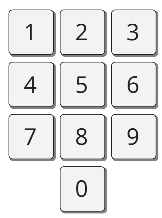
8. Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5:

a) Quantos números de três algarismos podemos formar?

b) Quantos números de três algarismos e iniciando pelo 5 podemos formar?

c) Quantos números ímpares de três algarismos podemos formar?

9. (ENEM) O sistema de segurança de um laboratório utiliza um teclado numérico, conforme ilustrado na figura.



O número de senhas com 4 dígitos, as quais não iniciam com o dígito zero é dado por:

a) 648
b) 1080
c) 5040
d) 6480
e) 9000

• Problemas de Análise Combinatória

Resolver problemas de contagem é algo que exige uma boa interpretação da situação descrita pelo problema e, também, certa dose de criatividade. Muitas vezes, para resolver uma questão, mais de um caminho poderá ser adotado.

Nos exercícios a seguir, apresentamos questões diversas de análise combinatória sem indicar a que tipo de agrupamento se referem, pois é assim que elas aparecem nos processos seletivos para nível superior. Nas resoluções, você deverá observar primeiro qual é o tipo de agrupamento que se está formando. A dica é ver se a **ordem** dos elementos é ou não relevante. Caso seja, então se trata de arranjos ou permutações, e, se não for, de combinações.

$n \rightarrow$ número de elementos disponíveis a serem agrupados;

$p \rightarrow$ número de elementos em cada agrupamento.

Arranjo $\rightarrow AB \neq BA;\ n \neq p.$

Permutação $\rightarrow AB \neq BA;\ n = p.$

Combinação $\rightarrow AB = BA;\ n \geq p.$

Resumo

- **Ordem influi:** arranjos ou permutações.
- **Ordem não influi:** combinações.

Para definir entre arranjo e permutação, verifique se entram todos os elementos dados no agrupamento que se quer formar. Se isso ocorrer, trabalhe com as permutações, caso contrário, trabalhe com os arranjos.

Usaremos **Arranjo**, **Permutação** e **Combinação** em problemas que **NÃO** permitem repetição de elementos no agrupamento.

APOIO AO TEXTO

10. Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

11. Quantas saladas de frutas com 2 frutas diferentes podemos formar a partir de 4 frutas diferentes?

12. Uma empresa tem 6 sócios. De quantos modos podemos organizar entre esses sócios uma diretoria formada por um presidente, um secretário e um tesoureiro?

13. De quantos modos podemos arrumar 5 livros distintos em uma estante?

14. Quantos números de 3 algarismos distintos, iniciando por 4, podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

15. Quantos números **pares** de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?

16. Quantos números de 3 algarismos distintos existem no sistema decimal de numeração, que é formado pelos algarismos 0, 1, 2, 3 e 4?

17. Chamamos de **anagrama** de uma palavra dada qualquer palavra com ou sem sentido que é formada pelas mesmas letras da palavra dada. Desse modo, calcule quantos anagramas tem a palavra **PALCO**:

18. Quantos anagramas da palavra "SENADOR":

a) começam por "S" e terminam por "R"?

b) começam por vogal?

19. Quantos anagramas da palavra "TEMPO" possuem as letras "E", "M" e "P" juntas?

20. Em uma festa, as 6 pessoas presentes cumprimentaram-se entre si apenas uma vez. Quantos apertos de mão houve na festa?

21. (ENEM) Uma pessoa produzirá uma fantasia utilizando como materiais: 2 tipos de tecidos diferentes e 5 tipos distintos de pedras ornamentais. Essa pessoa tem à sua disposição 6 tecidos diferentes e 15 pedras ornamentais distintas. A quantidade de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas é representada pela expressão:

a) $\frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{15!}{10!5!}$

b) $\frac{6!}{4!2!} + \frac{15!}{10!5!}$

c) $\frac{6!}{2!} + \frac{15!}{5!}$

d) $\frac{6!}{2!} \cdot \frac{15!}{5!}$

e) $\frac{21!}{7!14!}$

22. (UFSM) Para cuidar da saúde, muitas pessoas buscam atendimento em cidades maiores onde há centros médicos especializados e hospitais mais equipados. Muitas vezes, o transporte até essas cidades é feito por *vans* disponibilizadas pelas prefeituras. Em uma *van* com 10 assentos, viajarão 9 passageiros e o motorista. De quantos modos distintos os 9 passageiros podem ocupar suas poltronas na *van*?

a) 4.032.

b) 36.288.

c) 40.320.

d) 362.880.

e) 403.200.

23. (UFSM) As doenças cardiovasculares aparecem em primeiro lugar entre as causas de morte no Brasil. As cirurgias cardíacas são alternativas bastante eficazes no tratamento dessas doenças. Supõe-se que um hospital dispõe de 5 médicos cardiologistas, 2 médicos anestesistas e 6 instrumentadores que fazem parte do grupo de profissionais habilitados para realizar cirurgias cardíacas. Quantas equipes diferentes podem ser formadas com 3 cardiologistas, 1 anestesista e 4 instrumentadores?

a) 200.

b) 300.

c) 600.

d) 720.

e) 1.200.

24. Com as letras A, B, C, D e E e os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantas placas de automóveis podemos formar com 3 letras distintas e 4 algarismos distintos?

Importante

Até a questão 26, resolvemos apenas problemas da análise combinatória **simples**, que é a parte desse conteúdo em que os agrupamentos envolvidos **não apresentam repetição** de elementos. Para calcular o número de permutações com repetição, resolva os problemas usando as informações que seguem.

PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÃO

São permutações em que pelo menos um elemento aparece mais de uma vez. Para calcular o número de permutações em situações desse tipo, use a seguinte fórmula:

$$P_n^{\alpha,\beta} = \frac{P_n}{P_\alpha \cdot P_{\beta \ldots}}$$

Em que:

α = número de vezes que um elemento que se repete aparece;

β = número de vezes que um outro elemento que se repete aparece;

$\mathbf{P_n}$ = permutação dos **n** elementos a serem permutados;

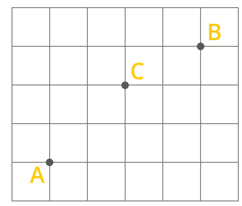
$\mathbf{P_\alpha}$ = permutação de α;

$\mathbf{P_\beta}$ = permutação de β.

APOIO AO TEXTO

25. Calcule quantos anagramas tem a palavra **batata**:

26. (ENEM) Três amigos, André, Bernardo e Carlos, moram em um condomínio fechado de uma cidade. O quadriculado representa a localização das ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho nesse condomínio, em que nos pontos A, B e C estão localizadas as casas de André, Bernardo e Carlos, respectivamente.



André deseja deslocar-se da sua casa até a casa de Bernardo, sem passar pela casa de Carlos, seguindo ao longo das ruas do condomínio, fazendo sempre deslocamentos para a direita ou para cima segundo o esquema da figura. O número de diferentes caminhos que André poderá utilizar para realizar o deslocamento nas condições propostas é:

a) 4.
b) 14.
c) 17.
d) 35.
e) 48.

Anotações:

AULA-
-PÍLULA

MATEMÁTICA

UNIDADE 4

» Probabilidade

A teoria das probabilidades originou-se do estudo dos jogos de azar, como o jogo de cartas, a roleta, o dado, etc. Essa teoria desenvolveu-se nos últimos séculos e é básica para o estudo da estatística, grandemente aplicada nas ciências exatas, humanas e biológicas. Por meio dela, estudam-se as chances de um experimento (experiência) aleatório ocorrer.

• O que é um experimento aleatório?

É o experimento que, repetido várias vezes nas mesmas condições, apresenta resultados imprevisíveis. O resultado de um experimento aleatório depende exclusivamente do acaso. São exemplos:

- jogar uma moeda e observar a face voltada para cima;
- lançar um dado, cujas faces estão numeradas de 1 a 6, e observar a face voltada para cima;
- adivinhar o resultado de um jogo de futebol;
- prever o sexo de uma criança ao nascer;
- extrair uma carta de um baralho;
- sortear uma das 60 dezenas da Mega-Sena.

• Espaço amostral

Chama-se espaço amostral de um experimento aleatório o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento.

O espaço amostral será representado por S, e seu número de elementos, por n(S).

– Exemplos:

1° experimento: Lançar um dado de faces numeradas de 1 a 6 e observar a face voltada para cima.

Temos: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e n(S) = 6.

2° experimento: Lançar uma moeda que tem, em uma face, cara e, na outra face, coroa e observar a figura da face voltada para cima. Vamos representar cara por C e coroa por K.

Temos: S = {cara, coroa} = {C, K} e n(S) = 2.

3° experimento: Lançar simultaneamente um dado e uma moeda e observar a face voltada para cima do dado e a face voltada para cima da moeda.

Temos: S = {(1, C), (1, K), (2, C), (2, K), (3, C), (3, K), (4, C), (4, K), (5, C), (5, K), (6, C), (6, K)} e n(S) = 12.

• Evento

Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório. Os eventos de um espaço amostral são representados pela letra E, e o número de seus elementos, por n(E).

– Exemplos:

Consideremos o experimento “jogar um dado e observar o número da face voltada para cima”. Seu espaço amostral é:

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Consideremos alguns eventos desse espaço amostral:

Evento 1: A face voltada para cima apresenta um número par.

Temos: E = {2, 4, 6} e n(E) = 3.

Evento 2: A face voltada para cima apresenta um número menor que 5.

Temos: E = {1, 2, 3, 4} e n(E) = 4.

Evento 3: A face voltada para cima apresenta um número par e primo.

Temos: E = {2} e n(E) = 1.

Quando o evento é formado por um único elemento, ele é chamado **evento simples** ou **evento elementar**. Portanto, o evento 3, como só tem um elemento, é um evento simples ou elementar.

Anotações:

• Probabilidade

Considere S o espaço amostral de um experimento aleatório e E um evento desse espaço amostral. Suponhamos que cada elemento desse espaço amostral tenha a mesma chance de ocorrer. Vamos então chamá-lo de espaço amostral equiprovável ou uniforme.

A probabilidade de o evento E ocorrer é representada por P(E), conforme a seguir:

$$P(E) = \frac{\text{número de vezes que o evento E pode ocorrer}}{\text{número de resultados possíveis do experimento}}$$

Porém, como o número de vezes que o evento A pode ocorrer é o número de elementos do evento A, e o número de resultados possíveis do experimento é o número de elementos do seu espaço amostral, podemos, também, definir a probabilidade de o evento A ocorrer assim:

$$P(E) = \frac{\text{número de elementos do evento E}}{\text{número de elementos do espaço amostral}}$$

Ou ainda:

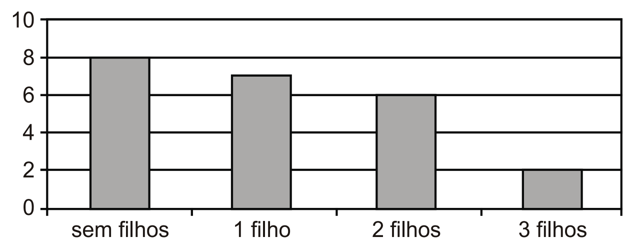
$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Anotações:

APOIO AO TEXTO

1. No lançamento de uma moeda, qual a probabilidade de obtermos, na face voltada para cima, uma coroa?

2. (ENEM) As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico a seguir.



Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é:

a) $\frac{1}{3}$.

b) $\frac{1}{4}$.

c) $\frac{7}{15}$.

d) $\frac{7}{23}$.

e) $\frac{7}{25}$.

3. (ENEM 2020) O Estatuto do Idoso, no Brasil, prevê certos direitos às pessoas com idade avançada, concedendo a estas, entre outros benefícios, a restituição de imposto de renda antes dos demais contribuintes. A tabela informa os nomes e as idades de 12 idosos que aguardam suas restituições de imposto de renda. Considere que, entre os idosos, a restituição seja concedida em ordem decrescente de idade e que, em subgrupos de pessoas com a mesma idade, a ordem seja decidida por sorteio.

Nome	Idade (em ano)
Orlando	89
Gustavo	86
Luana	86
Teresa	85
Márcia	84
Roberto	82
Heloísa	75
Marisa	75
Pedro	75
João	75
Antônio	72
Fernanda	70

Nessas condições, a probabilidade de João ser a sétima pessoa do grupo a receber sua restituição é igual a:

a) $\frac{1}{12}$.

b) $\frac{7}{12}$.

c) $\frac{1}{8}$.

d) $\frac{5}{6}$.

e) $\frac{1}{4}$.

4. No lançamento simultâneo de duas moedas, qual a probabilidade de obtermos pelo menos uma cara?

5. No lançamento simultâneo de dois dados, qual a probabilidade de obtermos a soma dos números de cada dado igual a 9?

6. Em uma urna, estão 10 bolas brancas, 8 verdes e 2 pretas. Se uma bola é retirada ao acaso, calcule a probabilidade de obtermos uma bola branca.

7. (UFRGS) Um jogo consiste em responder corretamente as perguntas sorteadas, ao girar um ponteiro sobre uma roleta numerada de 1 a 10 no sentido horário. O número no qual o ponteiro parar corresponde à pergunta a ser respondida. A cada número corresponde somente uma pergunta, e cada pergunta só pode ser sorteada uma vez. Caso o ponteiro pare sobre um número que já foi sorteado, o participante deve responder a próxima pergunta não sorteada, no sentido horário. Em um jogo, já foram sorteadas as perguntas 1, 2, 3, 5, 6, 7 e 10. Assim, a probabilidade de que a pergunta   seja a próxima a ser respondida é de:

a) $\frac{1}{4}$.

b) $\frac{1}{3}$.

c) $\frac{1}{2}$.

d) $\frac{2}{3}$.

e) $\frac{3}{4}$.

8. Em um posto médico, trabalham 4 médicos e 3 enfermeiras. Formam-se comissões de 5 pessoas, em cada turno, para atender os pacientes. Qual a probabilidade de se formar uma comissão composta por 3 médicos e 2 enfermeiras?

Propriedades da probabilidade

- Quando um evento é igual ao seu espaço amostral, é chamado de **evento certo**. A probabilidade de o evento certo ocorrer é igual a 1 ou 100%.

$$\text{Se } S = E, \text{ então } P(S) = P(E) = 1 = 100\%$$

– *Exemplo:*

No lançamento de uma moeda, a probabilidade de ocorrer cara ou coroa é 1 ou 100%, pois

$S = \{C, K\}$ e $n(S) = 2$, e o evento é $E = \{C, K\}$ e $n(E) = 2$.

Portanto, $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{2}{2} = 1 = 100\%$.

- Quando um evento é igual ao conjunto vazio, é chamado de **evento impossível**. A probabilidade de o evento impossível ocorrer é igual a zero ou 0%.

$$\text{Se } E = \varnothing, \text{ então } P(E) = P(\varnothing) = 0 = 0\%$$

– *Exemplo:*

No lançamento de um dado, a probabilidade de ocorrer um número menor que 1 na face voltada para cima é igual a zero ou 0%, pois

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $n(S) = 6$, e o evento é $E = \varnothing$ e $n(E) = 0$.

Portanto, $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{0}{6} = 0 = 0\%$.

- A probabilidade de um evento E ocorrer é um número real maior ou igual a zero e menor ou igual a 1.

$$\text{Se } E \text{ é um evento, então } 0 \leq P(E) \leq 1$$

Anotações:

• Probabilidade em um espaço não equiprovável

Até agora, estudamos a probabilidade em um espaço amostral equiprovável, em que cada elemento tem a mesma probabilidade de ocorrer.

Vamos estudar, então, o assunto probabilidade em um espaço amostral em que a probabilidade de seus elementos ocorrerem não é a mesma.

Consideremos um espaço amostral finito $S = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ no qual cada elemento tem uma probabilidade de ocorrer. Temos:

- a probabilidade de x_1 ocorrer é P_1;
- a probabilidade de x_2 ocorrer é P_2;
- a probabilidade de x_3 ocorrer é P_3;

.
.
.
.
.

- a probabilidade de x_n ocorrer é P_n.

As probabilidades de cada elemento têm as seguintes propriedades:

- Cada uma das probabilidades $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ é maior ou igual a zero e menor ou igual a 1.
- A soma das probabilidades de cada elemento do espaço amostral $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ocorrer é igual a 1, ou seja:

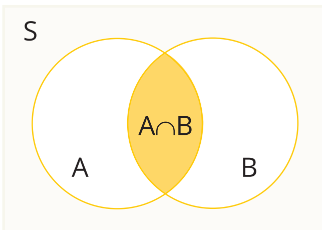
$$P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_n = 1$$

Anotações:

Probabilidade da união de dois eventos (Regra do "ou")

Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral S.

- **Ocorrer o evento A $\cup$ B** é ocorrer o evento A ou o evento B ou ocorrerem ambos os eventos A e B simultaneamente. Em outras palavras, é ocorrerem os elementos de A ou os elementos de B ou ocorrerem os elementos comuns a A e a B.
- **Ocorrer o evento A $\cap$ B** é ocorrer o evento A e o evento B simultaneamente. Em outras palavras, é ocorrerem os elementos comuns a A e a B. Assim, teremos:



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Eventos mutuamente exclusivos

Dois eventos são mutuamente exclusivos quando a ocorrência de um deles impede a ocorrência do outro, ou seja, são eventos que não podem ocorrer ao mesmo tempo.

– *Exemplo:* **Lança-se um dado e observa-se a face voltada para cima.**

Consideremos os eventos:

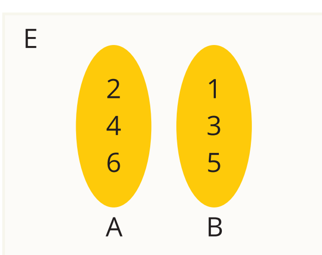
A: Ocorrer número par na face voltada para cima.

Temos: A = {2, 4, 6}

B: Ocorrer número ímpar na face voltada para cima.

Temos: B = {1, 3, 5}

Notemos que, se ocorrer número par na face voltada para cima do dado, não é possível ocorrer ao mesmo tempo número ímpar na mesma face. Quando jogamos um dado, não pode ocorrer, ao mesmo tempo, um número par e um número ímpar na face voltada para cima. Portanto, a ocorrência do evento A impede a ocorrência do evento B e vice-versa. Assim, A e B são eventos mutuamente exclusivos. E, ainda, observemos que os eventos A e B não têm elementos comuns, por conseguinte, a intersecção entre eles é o conjunto vazio.



$$A \cap B = \emptyset$$

Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então $A \cap B = \emptyset$ e em consequência:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

APOIO AO TEXTO

9. Em um colégio de 1.000 alunos, 500 alunos gostam de matemática, 400 gostam de física e 250 gostam de matemática e física. Um aluno é sorteado ao acaso.

Qual a probabilidade de ele gostar de matemática ou de física?

10. (UFSM) A tabela mostra o resultado de uma pesquisa sobre tipos sanguíneos em que foram testadas 600 pessoas.

Tipo de sangue	O^+	A^+	B^+	AB^+	O^-	A^-	B^-	AB^-
Número de pessoas	228	228	228	228	228	228	228	228

Qual é a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter sangue do tipo A^+ ou A^-?

a) $\frac{2}{25}$.

b) $\frac{11}{50}$.

c) $\frac{9}{25}$.

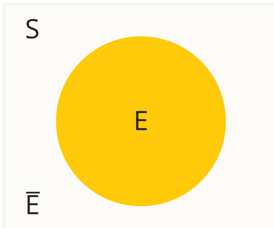
d) $\frac{19}{50}$.

e) $\frac{11}{25}$.

Probabilidade de ocorrer um evento em função da probabilidade de ocorrer o seu complementar

Consideremos um experimento aleatório de espaço amostral S. Seja E um evento desse espaço amostral e $\overline{E}$ o seu evento complementar.

Assim, temos:



$$P(E) = 1 - P(\overline{E})$$

A probabilidade de um evento ocorrer é igual a 1 menos a probabilidade de o seu evento complementar ocorrer.

Ou seja:

A probabilidade de um evento ocorrer é igual a 1 menos a probabilidade de ele não ocorrer.

– *Exemplo:* Se a probabilidade de um atirador acertar um alvo é 0,7, então a probabilidade de o atirador errar o alvo é 1 menos a probabilidade de acertar o alvo, ou seja, é 1 - 0,7 = 0,3.

APOIO AO TEXTO

11. Um cesto contém 9 frutas, das quais 3 estão estragadas. Escolhendo, ao acaso, 2 frutas desse cesto, determine a probabilidade de que pelo menos uma esteja estragada.

Obs.: O evento complementar de "pelo menos uma estragada" é "nenhuma estragada".

12. (ENEM) Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em uma sala, serem chamados para uma entrevista. Mas, ao invés de chamá-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos. A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é:

a) 23,7%
b) 30,0%
c) 44,1%
d) 65,7%
e) 90,0%

• Probabilidade condicional

Consideremos um espaço amostral S e dois eventos, A e B, em que o evento B já ocorreu antes de o evento A ocorrer.

Seja, então, B o evento que já ocorreu e A o evento que se quer que ocorra.

Importante

Em um problema de probabilidade condicional:

- sempre deve haver um evento que já tenha ocorrido;
- o espaço amostral reduz-se ao evento que já ocorreu, ou seja, o espaço amostral fica sendo o evento que já ocorreu.

APOIO AO TEXTO

13. No sorteio de um número de 1 a 25, sabe-se que foi sorteado um número menor que 12. Qual a probabilidade de ter sido sorteado um número ímpar?

Probabilidade de dois eventos ocorrerem simultaneamente ou sucessivamente (regra do "e")

É conhecida como teorema da Multiplicação das Probabilidades e aplicada em problemas que pedem a probabilidade de ocorrer um evento A e um evento B, pois o conectivo **e** indica a **intersecção** dos eventos.

Sendo A e B eventos independentes, então:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

APOIO AO TEXTO

14. Uma urna contém 10 bolas brancas e 12 bolas pretas. Retirando-se, ao acaso, sucessivamente e com reposição, 2 bolas, calcule a probabilidade de:

a) as duas bolas serem brancas

b) saírem duas bolas de cores diferentes

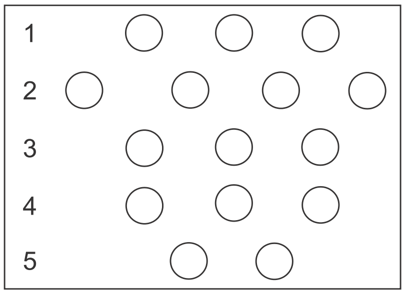
15. Uma urna contém 8 bolas azuis e 5 vermelhas. Retiram-se, aleatoriamente, sucessivamente e sem reposição, 2 bolas. Determine a probabilidade de:

a) as duas bolas serem vermelhas

b) a primeira bola ser azul e a segunda ser vermelha

16. (ENEM) Uma empresa de alimentos imprimiu em suas embalagens um cartão de apostas do seguinte tipo:

Frente do cartão



Verso do cartão

Como jogar:

- Inicie raspando apenas uma das alternativas da linha de início (linha 1).
- Se achar uma bola de futebol, vá para a linha 2 e raspe apenas uma das alternativas. Continue raspando dessa forma até o fim do jogo.
- Se encontrar um "X" em qualquer uma das linhas, o jogo está encerrado e você não terá direito ao prêmio.
- Se você encontrar uma bola de futebol em cada uma das linhas terá direito ao prêmio.

Cada cartão de apostas possui 7 figuras de bolas de futebol e 8 sinais de "X" distribuídos entre os 15 espaços possíveis, de tal forma que a probabilidade de um cliente ganhar o prêmio nunca seja igual a zero. Em determinado cartão existem duas bolas na linha 4 e duas bolas na linha 5. Com esse cartão, a probabilidade de o cliente ganhar o prêmio é:

a) $\frac{1}{27}$.

b) $\frac{1}{36}$.

c) $\frac{1}{54}$.

d) $\frac{1}{72}$.

e) $\frac{1}{108}$.

Anotações:

17. João e Maria são irmãos que viajaram para cidades diferentes. A probabilidade de João telefonar para seus pais é 0,7, e a probabilidade de Maria telefonar para seus pais é 0,9. Pergunta-se:

a) Qual a probabilidade de João e Maria telefonarem para seus pais?

b) Qual a probabilidade de João telefonar para seus pais e Maria não telefonar?

c) Qual a probabilidade de exatamente um dos dois irmãos telefonar para seus pais?

d) Qual a probabilidade de pelo menos um dos dois irmãos telefonar para seus pais?

18. (ENEM) No próximo final de semana, um grupo de alunos participará de uma aula de campo. Em dias chuvosos, aulas de campo não podem ser realizadas. A ideia é que essa aula seja no sábado, mas, se estiver chovendo no sábado, a aula será adiada para o domingo. Segundo a meteorologia, a probabilidade de chover no sábado é de 30% e a de chover no domingo é de 25%. A probabilidade de que a aula de campo ocorra no domingo é de:

a) 5,0%

b) 7,5%

c) 22,5%

d) 30,0%

e) 75,0%

Anotações:

» Simplificações em trigonometria

Formulário

Além de fórmulas que relacionam as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, a lista abaixo apresenta três novas razões: cotangente, secante e cossecante.

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$ com $\cos\alpha \neq 0$

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$$ com $\text{sen}\,\alpha \neq 0$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$ com $\cos\alpha \neq 0$

$$\text{cossec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}$$ com $\text{sen}\,\alpha \neq 0$

$$1 + \text{tg}^2\,\alpha = \sec^2\alpha$$

$$1 + \text{cotg}^2\,\alpha = \text{cossec}^2\,\alpha$$

Anotações:

APOIO AO TEXTO

1. O valor de M, para que se tenha simultaneamente sen $x = \sqrt{1 - M^2}$ e cos x = M + 2, é:

a) -2
b) -3
c) -1
d) 2
e) 3

2. Sendo sen x = -3/5, $x \in 3^o$ Q, determine tg x.

3. A expressão $y = \dfrac{\sec x - \text{sen}\,x}{\text{cossec}\,x - \cos x}$ é equivalente a:

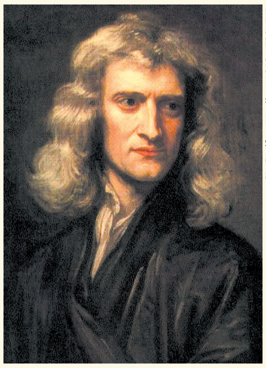
a) sen x
b) cos x
c) tg x
d) sec x
e) cotg x

GABARITO

1. C 2. 3/4 3. C

» Binômio de Newton

É o dispositivo criado por Isaac Newton que serve para obtermos o desenvolvimento da potência de expoente natural de um binômio.


Sir Godfrey Kneller (1646-1723)/BID

Para calcularmos um termo qualquer do desenvolvimento da potência de expoente natural de um binômio, usamos a fórmula:

$$T_{p+1} = C_n^p (1^\circ \text{ termo})^{n-p} \cdot (2^\circ \text{ termo})^p$$

Em que:

n = expoente do binômio;

p = número de termos antes do termo procurado.

APOIO AO TEXTO

1. Calcule o 3º termo do desenvolvimento de $(4x + a)^5$:

2. Calcule o termo médio de $\left(2x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^4$:

3. Calcule o termo independente de x em $\left(3x^2 - \frac{2}{x^4}\right)^6$:

4. Determine o valor do termo de x^4 em $\left(2x^3 - \frac{1}{x}\right)^8$:

5. Calcule a soma dos coeficientes do desenvolvimento de:

a) $(x + a)^4$

b) $(2x + 3y)^5$

6. Calcule o valor de **n** para que a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(3x + 2y)^{4n-3}$ seja 3.125:

• Número binomial

É uma forma de representar a combinação de elementos.

$$\binom{n}{p} = C_n^p,\ n \geq p$$

Observações

- Um número binomial, com denominador igual a zero, é igual a um.

$$\binom{n}{0} = 1$$

- Um número binomial, com denominador igual a um, é igual ao seu próprio numerador.

$$\binom{n}{1} = n$$

- Um número binomial, com denominador igual ao numerador, é igual a um.

$$\binom{n}{n} = 1$$

Propriedade

$$\binom{n}{n} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ \dots \ + \binom{n}{n} = 2^n$$

APOIO AO TEXTO

7. A soma $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$, é igual a:

a) 2
b) 4
c) 8
d) 16
e) 32

8. A solução da equação $\binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3} + \dots + \binom{x}{x} = 63$ é:

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

Anotações:

GABARITO

1. $640x^3a^2$
2. $24x^2$
3. 4.860
4. $-448x^4$
5. a) 16
b) 3.125
6. n = 2
7. D
8. C

» Geometria Analítica

• Estudo do ponto

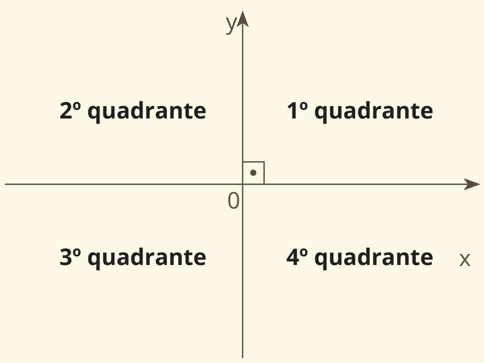
Plano cartesiano

É o plano dotado de dois eixos orientados perpendiculares, em que o eixo horizontal chama-se **eixo das abscissas** (ou **eixo dos x**), e o eixo vertical chama-se **eixo das ordenadas** (ou **eixo dos y**). O ponto de intersecção dos dois eixos, representado pela letra **O**, chama-se **origem dos eixos**.

Todo ponto no plano cartesiano é representado por um par ordenado (x, y) em que o **x**, o primeiro elemento do par, é chamado de abscissa do ponto, e o **y**, o segundo elemento do par, é chamado de ordenada do ponto. A abscissa de cada ponto é marcada no eixo das abscissas (ou eixo dos **x**), e a ordenada é marcada no eixo das ordenadas (ou eixo dos **y**). A abscissa e a ordenada de um ponto compõem as coordenadas desse ponto.

Por exemplo, dado o ponto A (2, 3), **2** é a sua abscissa, **3** é a sua ordenada, e a abscissa 2 e a ordenada 3 formam as suas coordenadas. Portanto, podemos enunciar o ponto A (2, 3) assim: "ponto A de coordenadas 2 e 3".

Os eixos das abscissas e das ordenadas, também chamados eixos coordenados, dividem o plano cartesiano em quatro regiões, chamadas **quadrantes**.



Forma de um ponto

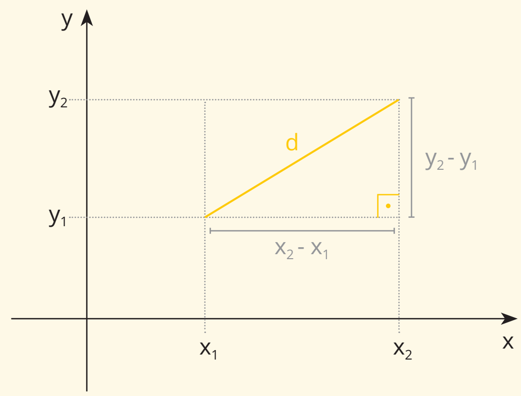
- No eixo x ou eixo das abscissas: (x, 0);

- No eixo y ou eixo das ordenadas: (0, y).

Distância entre dois pontos

Dados dois pontos do plano cartesiano, A (x_1, y_1) e B (x_2, y_2), a distância entre os dois pontos é dada por:

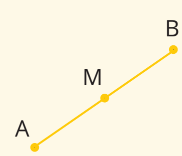
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



APOIO AO TEXTO

1. Determine a distância entre os pontos A (5, 7) e B (1, 4).

Ponto médio de um segmento



Sendo A (x_1, y_1) e B (x_2, y_2) as extremidades do segmento AB, o ponto médio M será determinado por:

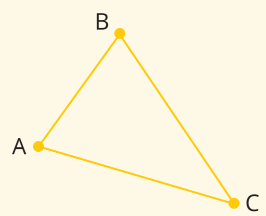
$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

APOIO AO TEXTO

2. Determine as coordenadas do ponto médio do segmento de extremidades (-1, 2) e (3, 4).

3. Determine o comprimento da mediana relativa ao vértice C do triângulo de vértices A (-6, 2); B (4, 2) e C (3, 3).

Área de um triângulo



A área do triângulo cujos vértices são os pontos A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) e C (x_3, y_3) é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{matrix} \right\|$$

APOIO AO TEXTO

4. Dados A (1, 2), B (5, 4) e C (3, 5), calcule a área do triângulo ABC.

Condição de alinhamento de três pontos

Dados três pontos, A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) e C (x_3, y_3), dizemos que os pontos estão alinhados, isto é, pertencem a uma mesma reta, se e somente se:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Importante

Se o "determinante" não é nulo, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo.

APOIO AO TEXTO

5. Qual deve ser o valor de x para que os pontos A (x, 5), B (2, 6) e C (1, 1) estejam alinhados?

Anotações:

• Estudo da reta

Elementos da reta

- **Inclinação de uma reta (α)**

É o ângulo que a reta forma com o sentido positivo do eixo dos x.

- **Coeficiente angular ou parâmetro angular ou declividade de uma reta (a)**

É a tangente da sua inclinação.

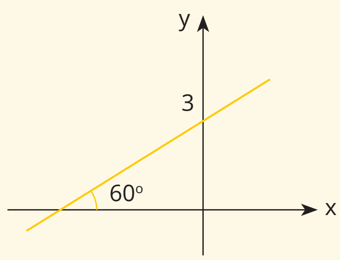
- **Coeficiente linear ou parâmetro linear (b)**

É a ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo dos y.

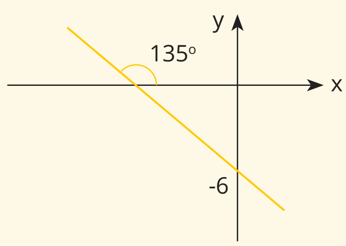
APOIO AO TEXTO

6. Determine o coeficiente angular e o coeficiente linear das retas abaixo:

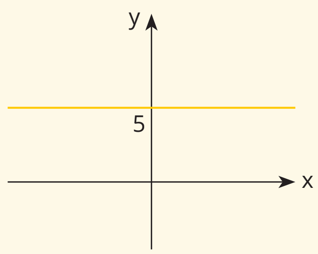
a)



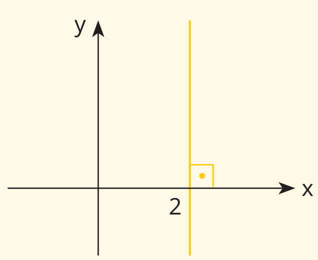
b)



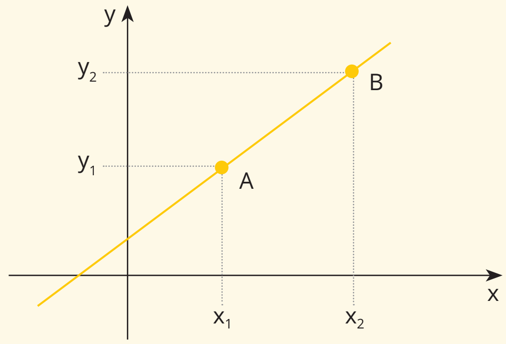
c)



d)



Coeficiente angular de uma reta que passa por dois pontos



O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A (x_1, y_1) e B (x_2, y_2) é dado por:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Equação reduzida da reta

$$y = ax + b$$

a é o coeficiente angular da reta;
b é o coeficiente linear da reta.

– *Exemplo:* $\mathbf{y = 2x + 3}$

$a = 2 \quad b = 3$

Equação geral da reta

$$Ax + By + C = 0$$

A, **B** e **C** são os coeficientes da equação.

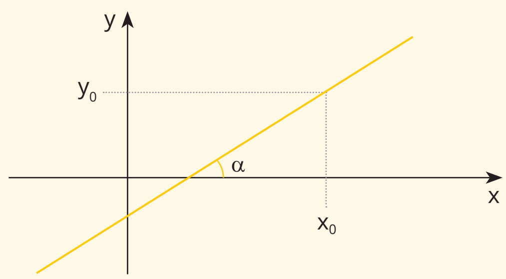
– *Exemplo:* $\mathbf{3x - 4y + 1 = 0}$

$A = 3 \qquad B = -4 \qquad C = 1$

Equação da reta que passa por um ponto

Dado um ponto por onde passa uma reta e o seu coeficiente angular, a equação dessa reta será dada por:

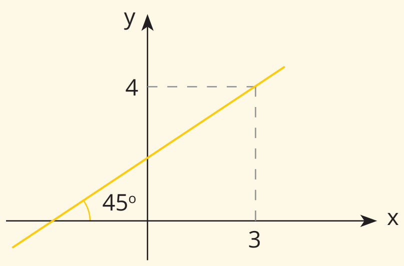
$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$



a = coeficiente angular da reta;
$\mathbf{(x_0, y_0)}$ = ponto por onde passa a reta.

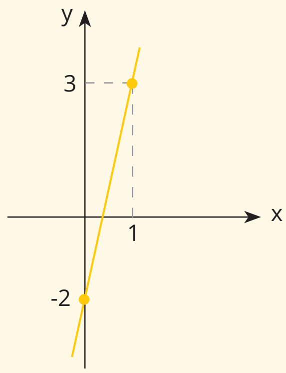
APOIO AO TEXTO

7. Determine a equação geral da reta abaixo representada.



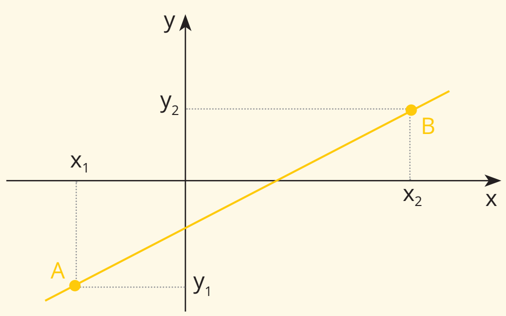
APOIO AO TEXTO

8. Determine a equação geral da reta abaixo representada.



Equação da reta que passa por dois pontos

Dada uma reta que passa por dois pontos, sua equação pode ser obtida a partir da condição de alinhamento entre três pontos.



$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x & x_1 \\ y_1 & y_2 & y & y_1 \end{vmatrix} = 0$$

(x_1, y_1) e (x_2, y_2) são os pontos conhecidos por onde passa a reta, e (x, y) é um ponto aleatório da reta.

Ponto que pertence a uma reta

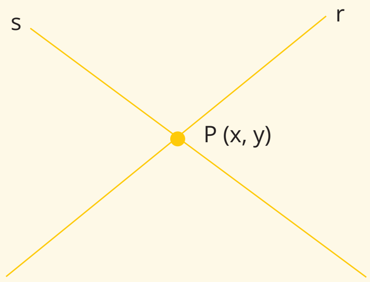
Para que um ponto pertença a uma reta, suas coordenadas devem satisfazer a equação da reta. Dizemos que uma igualdade é satisfeita quando, de fato, o lado esquerdo é igual ao lado direito dessa igualdade.

APOIO AO TEXTO

9. Determine o valor de **m** para que o ponto (3, 5) pertença à reta de equação 2x + my - 15 = 0.

Intersecção entre retas

Para determinarmos o ponto de intersecção entre duas retas, devemos resolver o **sistema formado pelas suas equações**.



APOIO AO TEXTO

10. Determine o ponto de intersecção entre as retas r: $2x + y - 3 = 0$ e s: $x - y + 9 = 0$.

Ponto de intersecção de uma reta com os eixos coordenados

- **Eixo x ou eixo das abscissas**
  Calcula-se o **x**, substituindo o y por zero.
- **Eixo y ou eixo das ordenadas**
  Calcula-se o **y**, substituindo o x por zero.

APOIO AO TEXTO

11. Determine os pontos de intersecção da reta $4x - 5y + 20 = 0$ com os eixos coordenados.

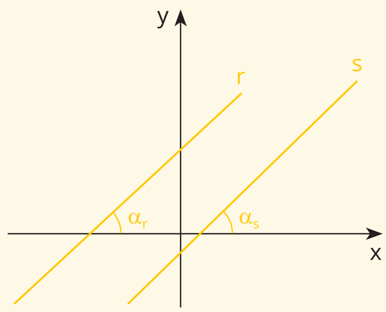
12. Qual a equação geral da reta que possui inclinação 135º e que passa pelo ponto de intersecção da reta $6x + 9y + 18 = 0$ com o eixo das abscissas?

Posição entre duas retas

RETAS PARALELAS

Sejam as retas:

$$r: y = a_r x + b_r$$
$$s: y = a_s x + b_s$$



Importante

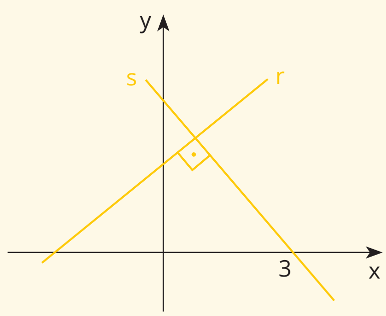
Se duas retas não paralelas ao eixo y são paralelas entre si, então seus coeficientes angulares são iguais.

$$a_r = a_s$$

Retas perpendiculares

Sejam as retas:

$$r: y = a_r x + b_r$$
$$s: y = a_s x + b_s$$



Importante

Se duas retas não perpendiculares a alguns dos eixos coordenados são perpendiculares entre si, então seus coeficientes angulares são inversos e de sinais diferentes.

$$a_r = \frac{-1}{a_s}$$

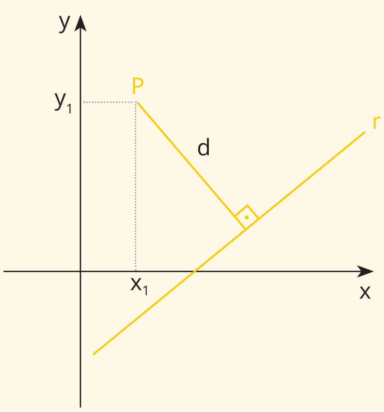
APOIO AO TEXTO

13. Determine a equação geral da reta **r** que passa pelo ponto P (3, -4) e é paralela à reta s: $3x - 2y + 7 = 0$.

14. Ache a equação da mediatriz do segmento de extremos A (1, -1) e B (3, 7).

Distância entre um ponto e uma reta

Dado um ponto P (x_1, y_1) e uma reta **r** de equação $Ax + By + C = 0$, a distância entre **P** e **r** é dada por:



$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

APOIO AO TEXTO

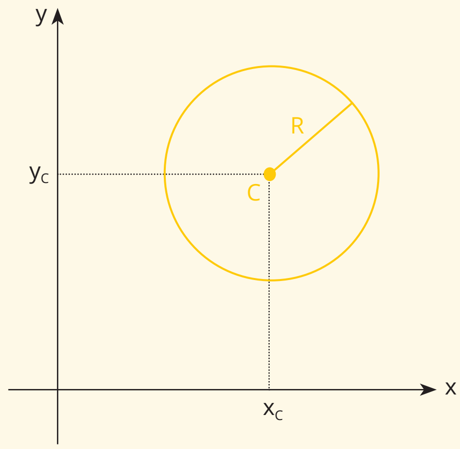
15. Determine a distância do ponto (2, 5) à reta de equação $4x + 3y - 13 = 0$.

16. Dado o triângulo de vértices A (3, -2), B (2, 3) e C (4, 5), determine a medida da altura relativa ao vértice A do triângulo.

Anotações:

• Estudo da circunferência

Equação



A equação da circunferência de centro no ponto C (x_1, y_1) e raio R é:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$$

APOIO AO TEXTO

17. Determine a equação reduzida da circunferência de centro (-3, 2) e raio 4:

18. Determine a equação reduzida da circunferência de centro no ponto (1, -3) que passa pelo ponto (4, -1).

19. A reta de equação $x + y + 2 = 0$ é tangente a uma circunferência de centro C (2, 0). Indique a equação reduzida da circunferência.

Cálculo do centro e do raio de uma circunferência

Dada a circunferência de equação $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, as coordenadas do seu centro C (x_C, y_C) são dadas por:

Condição: $A = B = 1$

$$x_C = \frac{C}{-2} \qquad y_C = \frac{D}{-2}$$

A medida do seu raio R é dada por:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 - E}$$

APOIO AO TEXTO

20. Determine o centro e o raio das circunferências abaixo:

a) $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 16 = 0$

b) $2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y - 2 = 0$

21. Determine a área do círculo limitado pela circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$.

22. Determine a equação geral da reta que tangencia a circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ no ponto P (4, 6) dessa circunferência.

• Posição relativa entre reta e circunferência

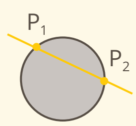
Para determinarmos a posição relativa entre uma reta e uma circunferência, devemos resolver o sistema formado pelas suas equações.

A resolução do sistema recai em uma equação quadrática, e três casos poderão ocorrer:

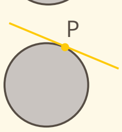
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Se resultar

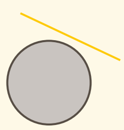
- $\Delta > 0 \rightarrow$ reta secante: "corta" a circunferência em dois pontos diferentes.



- $\Delta = 0 \rightarrow$ reta tangente: "corta" a circunferência em apenas um ponto.



- $\Delta < 0 \rightarrow$ reta externa: não "corta" a circunferência.



APOIO AO TEXTO

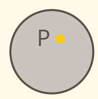
23. Determine o comprimento da corda que a reta de equação $x + y - 7 = 0$ determina na circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$.

• Posição relativa entre ponto e circunferência

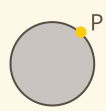
Para verificarmos a posição de um ponto em relação a uma circunferência, devemos substituir as coordenadas do ponto na equação da circunferência e:

Se resultar

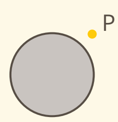
- **menor que zero** $\rightarrow$ ponto interno;



- **igual a zero** $\rightarrow$ ponto pertencente;



- **maior que zero** $\rightarrow$ ponto externo.



APOIO AO TEXTO

24. Determine a posição dos pontos (2, 3), (-1, 2) e (0, 3) em relação à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$.

• Reconhecimento de uma circunferência

Para que uma equação quadrática com duas variáveis represente a equação de uma circunferência:

- os coeficientes x^2 e y^2 devem ser **iguais e diferentes de zero**;
- **não pode haver termo em xy**;
- **o raio deve ser um número real positivo**, ou seja:

$$R > 0$$

APOIO AO TEXTO

25. Para que valores **m** e **k** a equação $mx^2 + y^2 + 4x - 6y + k = 0$ representa uma circunferência?

Anotações:

GABARITO

1. 5
2. (1, 3)
3. $\sqrt{17}$
4. A = 4
5. -2/3 e 6
6. a) $\alpha = 60°$; $a = \sqrt{3}$, b = 3
b) $\alpha = 135°$; a = -1; b = -6
c) $\alpha = 0°$; a = 0; b = 5
d) $\alpha = 90°$; a = Não existe; b = Não existe.
7. $x - y + 1 = 0$
8. $5x - y - 2 = 0$
9. m = 9/5
10. (-2, 7)
11. Eixo x: (-5, 0); Eixo y: (0, 4)
12. $x + y + 3 = 0$
13. $3x - 2y - 17 = 0$
14. $x + 4y - 14 = 0$
15. d = 2
16. $h = 3\sqrt{2}$
17. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2$
18. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 13$
19. $(x - 2)^2 + y^2 = 8$
20. a) C (2, -4) R = 2 b) C (2, -1) $R = \sqrt{6}$
21. $A_o = 16\pi$
22. $2x + 3y - 26 = 0$
23. $2\sqrt{2}$
24. (2, 3) interno
(-1, 2) externo
(0, 3) pertence
25. m = 1; k < 13

• Regiões de um plano

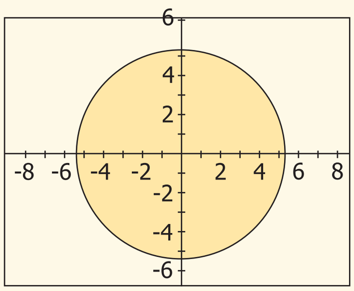
Anteriormente, trabalhamos de forma intensiva com retas e com circunferências. Também conhecemos a parábola, a senoide, a cossenoide, etc. O que todas essas curvas têm em comum? Suas representações geométricas são **linhas** no plano. Especificamente, a circunferência é uma **linha** fechada. Além disso, suas equações algébricas são igualdades. Por exemplo:

- A reta $2x + 3y + 12 = 0$ (é uma igualdade).
- A circunferência $x^2 + y^2 = 16$ (é uma igualdade).

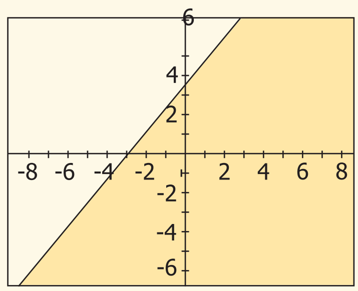
Sendo assim, o que representa a inequação $x^2 + y^2 < 16$ no plano? Representa o conjunto de pontos (**região**) internos àquela circunferência.

Vejamos outros exemplos:

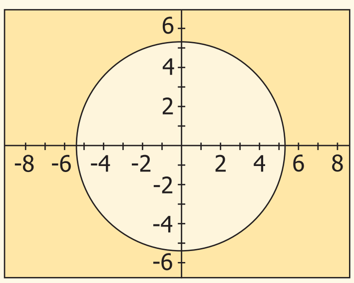
$x^2 + y^2 \leq 25$



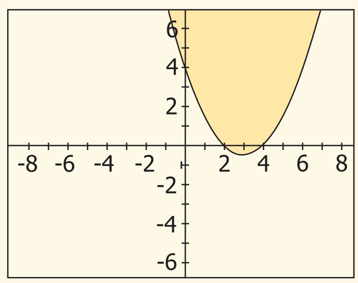
$x - y + 3 \geq 0$



$x^2 + y^2 \geq 25$



$y > 0{,}5x^2 - 3x + 4$



Importante

Para definir a região do plano determinada por uma desigualdade, adote os seguintes passos:

1º. Troque a desigualdade pela igualdade e trace o gráfico que corresponde à equação. Esse gráfico deverá ser **pontilhado**, caso a inequação seja do tipo < ou >, ou **cheio**, caso a inequação seja do tipo ≤ ou ≥.

2º. Escolha um ponto qualquer do plano e substitua esse ponto na desigualdade.

3º. Se o ponto do passo 2 satisfaz a desigualdade, então preencha (hachure) toda a porção do plano ao qual esse ponto pertence, sem extrapolar os limites impostos pelo gráfico feito no passo 1.

4º. Caso contrário, deixe essa região em branco e hachure o restante do plano.

Anotações:

GABARITO

• Apoio ao texto

Unidade 1

1. 30, 78 e 398
2. B
3. C
4. 7
5. B
6. B
7. D
8. 1020
9. B
10. 2
11. D
12. 8
13. B

Unidade 2

1. D
2. B
3. Im = [1,5] e P = 12
4. B
5. A
6. $P = 3\pi$
   $D = \frac{-3\pi}{2} + 3k\pi$
7. C
8. B
9. D
10. a) $-\sqrt{2}/2$
    b) $-1/2$
    c) $-\sqrt{3}$
11. $4\sqrt{3}$
12. $12\sqrt{2}$
13. D
14. a) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
    b) $-\text{sen } x$
15. C
16. a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou
    $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou
    b) $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou
    $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ou
17. C

Unidade 3

1. a) 90
   b) 120
   c) 11
2. 12
3. 12
4. E
5. D
6. 24
7. 625
8. a) 180
   b) 36
   c) 90
9. E
10. 120
11. 6
12. 120
13. 120
14. 20
15. 90
16. 48
17. 120
18. a) 120
    b) 2.160
19. 36
20. 15
21. A
22. D
23. B
24. 21.600
25. 60
26. C

Unidade 4

1. 1/2
2. E
3. E
4. 3/4
5. 1/9
6. 1/2
7. C
8. 4/7
9. 13/20
10. E
11. 7/12
12. D
13. 6/11
14. a) 25/121
    b) 60/121
15. a) 5/39
    b) 10/39
16. C
17. a) 63%
    b) 7%
    c) 34%
    d) 97%
18. C

• Referências

IEZZI, Gelson; et al. Fundamentos de Matemática Elementar. São Paulo: Atual, 1983.
LIMA, Elon Lages; et al. Coordenadas no plano. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
PAIVA, Manoel. Matemática. São Paulo: Moderna, 2002.

HABILIDADES À PROVA 1

» *Progressões*

◯ **1. (ENEM)** Nos últimos anos, a corrida de rua cresce no Brasil. Nunca se falou tanto no assunto como hoje, e a quantidade de adeptos aumenta progressivamente, afinal, correr traz inúmeros benefícios para a saúde física e mental, além de ser um esporte que não exige um alto investimento financeiro.

Disponível em: http://www.webrun.com.br. Acesso em: 28 abr. 2010.

Um corredor estipulou um plano de treinamento diário, correndo 3 quilômetros no primeiro dia e aumentando 500 metros por dia, a partir do segundo. Contudo, seu médico cardiologista autorizou essa atividade até que o corredor atingisse, no máximo, 10 km de corrida em um mesmo dia de treino. Se o atleta cumprir a recomendação médica e praticar o treinamento estipulado corretamente em dias consecutivos, pode-se afirmar que esse planejamento de treino só poderá ser executado em, exatamente:

a) 12 dias.
b) 13 dias.
c) 14 dias.
d) 15 dias.
e) 16 dias.

◯ **2. (ENEM)** O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro, foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em março, 36.000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes.

Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

a) 38.000
b) 40.500
c) 41.000
d) 42.000
e) 48.000

◯ **3. (ENEM)** O trabalho em empresas de festas exige dos profissionais conhecimentos de diferentes áreas. Na semana passada, todos os funcionários de uma dessas empresas estavam envolvidos na tarefa de determinar a quantidade de estrelas que seriam utilizadas na confecção de um painel de Natal.

Um dos funcionários apresentou um esboço das primeiras cinco linhas do painel, que terá, no total, 150 linhas.

★	★★	★★★	★★★★	★★★★★	...
1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	150ª

Após avaliar o esboço, cada um dos funcionários esboçou sua resposta:

– funcionário I: aproximadamente 200 estrelas;
– funcionário II: aproximadamente 6.000 estrelas;
– funcionário III: aproximadamente 12.000 estrelas;
– funcionário IV: aproximadamente 22.500 estrelas;
– funcionário V: aproximadamente 22.800 estrelas.

Qual funcionário apresentou um resultado mais próximo da quantidade de estrelas necessária?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

◯ **4. (ENEM)** As projeções para a produção de arroz no período de 2012-2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida, no período de 2012 a 2021, será de:

a) 497,25
b) 500,85
c) 502,87
d) 558,75
e) 563,25

◯ **5. (ENEM)** Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem três cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem sete cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas.

A quantidade de cartas que forma o monte é:

a) 21
b) 24
c) 26
d) 28
e) 31

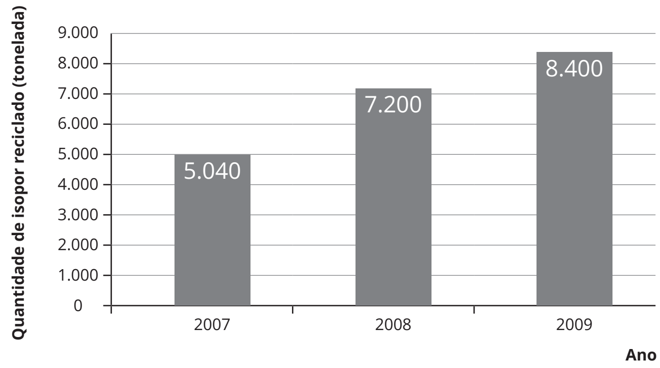
◯ **6. (ENEM)** A prefeitura de um pequeno município do interior decide colocar postes para iluminação ao longo de uma estrada retilínea, que inicia em uma praça central e termina numa fazenda na zona rural. Como a praça já possui iluminação, o primeiro poste será colocado a 80 metros da praça, o segundo, a 100 metros, o terceiro, a 120 metros, e assim sucessivamente, mantendo-se sempre uma distância de vinte metros entre os postes, até que o último poste seja colocado a uma distância de 1.380 metros da praça.

Se a prefeitura pode pagar, no máximo, R$ 8.000,00 por poste colocado, o maior valor que poderá gastar com a colocação desses postes é:

a) R$ 512.000,00.
b) R$ 520.000,00.
c) R$ 528.000,00.
d) R$ 552.000,00.
e) R$ 584.000,00.

Anotações:

◯ **7. (ENEM 2020)** O isopor é um material composto por um polímero chamado poliestireno. Todos os produtos de isopor são 100% recicláveis, assim como os plásticos em sua totalidade. O gráfico mostra a quantidade de isopor, em tonelada, que foi reciclada no Brasil nos anos de 2007, 2008 e 2009. Considere que o aumento da quantidade de isopor reciclado ocorrida de 2008 para 2009 repita-se ano a ano de 2009 até 2013 e, a partir daí, a quantidade total reciclada anualmente permaneça inalterada por um período de 10 anos.



Disponível em: www.plastivida.org.br. Acesso em: 31 jul. 2012 (adaptado).

Qual é a quantidade prevista para reciclagem de isopor, em tonelada, para o ano de 2020?

a) 21 840
b) 21 600
c) 13 440
d) 13 200
e) 9 800

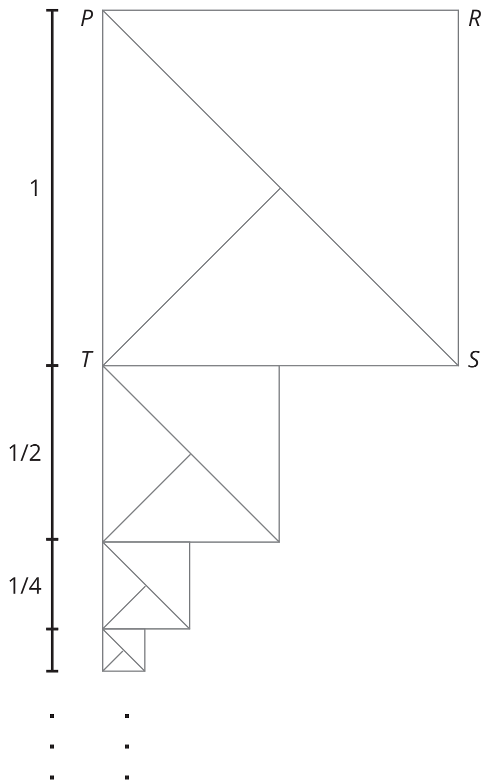
◯ **8. (ENEM)** Torneios de tênis, em geral, são disputados em sistema de eliminatória simples. Nesse sistema, são disputadas partidas entre dois competidores, com a eliminação do perdedor e promoção do vencedor para a fase seguinte. Dessa forma, se na 1ª fase o torneio conta com 2n competidores, então na 2ª fase restarão **n** competidores, e assim sucessivamente até a partida final.

Em um torneio de tênis, disputado nesse sistema, participam 128 tenistas.

Para se definir o campeão desse torneio, o número de partidas necessárias é dado por:

a) 2 x 128
b) 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2
c) 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1
d) 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2
e) 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1

◯ **9. (ENEM 2020)** O artista gráfico holandês Maurits Cornelius Escher criou belíssimas obras nas quais as imagens se repetiam, com diferentes tamanhos, induzindo ao raciocínio de repetição infinita das imagens. Inspirado por ele, um artista fez um rascunho de uma obra na qual propunha a ideia de construção de uma sequência de infinitos quadrados, cada vez menores, uns sob os outros, conforme indicado na figura.



O quadrado PRST, com lado de medida 1, é o ponto de partida. O segundo quadrado é construído sob ele tomando-se o ponto médio da base do quadrado anterior e criando-se um novo quadrado, cujo lado corresponde à metade dessa base. Essa sequência de construção se repete recursivamente.

Qual é a medida do lado do centésimo quadrado construído de acordo com esse padrão?

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{99}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{97}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-98}$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-99}$

◯ **10. (ENEM 2023)** O gerente de uma fábrica pretende comparar a evolução das vendas de dois produtos similares (I e II). Para isso, passou a verificar o número de unidades vendidas de cada um desses produtos em cada mês. Os resultados dessa verificação, para os meses de abril a junho, são apresentados na tabela.

Produto	Vendas em abril (unidade)	Vendas em maio (unidade)	Vendas em junho (unidade)
I	80	90	100
II	190	170	150

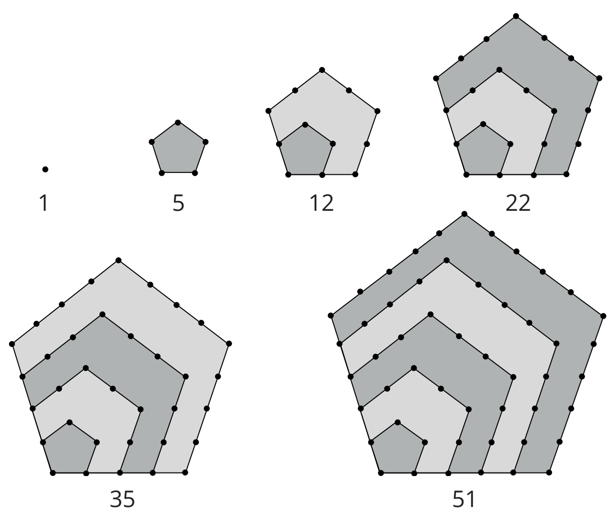
O gerente estava decidido a cessar a produção do produto II no mês seguinte àquele em que as vendas do produto I superassem as do produto II.

Suponha que a variação na quantidade de unidades vendidas dos produtos I e II se manteve, mês a mês, como no período representado na tabela.

Em qual mês o produto II parou de ser produzido?

a) Junho.
b) Julho.
c) Agosto.
d) Setembro.
e) Outubro.

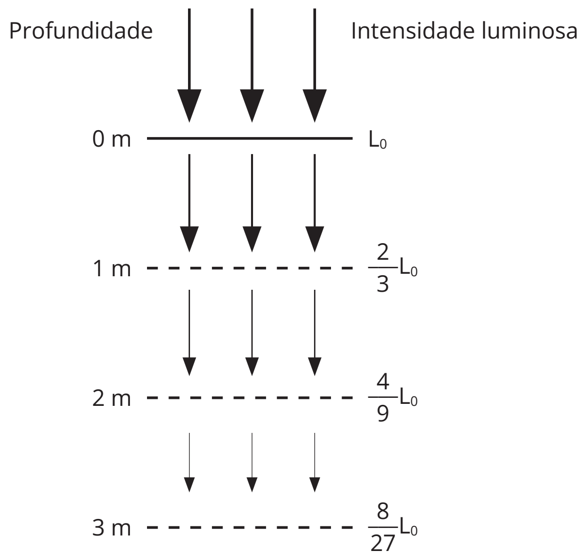
◯ **11. (ENEM 2023)** Os números figurados pentagonais provavelmente foram introduzidos pelos pitagóricos por volta do século V a.C. As figuras ilustram como obter os seis primeiros deles, sendo os demais obtidos seguindo o mesmo padrão geométrico.



O oitavo número pentagonal é

a) 59.
b) 83.
c) 86.
d) 89.
e) 92.

◯ **12. (ENEM 2023)** O esquema mostra como a intensidade luminosa decresce com o aumento da profundidade em um rio, sendo L_0 a intensidade na sua superfície.



Considere que a intensidade luminosa diminui, a cada metro acrescido na profundidade, segundo o mesmo padrão do esquema.

A intensidade luminosa correspondente à profundidade de 6 m é igual a:

a) $\frac{1}{9}L_0$

b) $\frac{16}{27}L_0$

c) $\frac{32}{243}L_0$

d) $\frac{64}{729}L_0$

e) $\frac{128}{2187}L_0$

◯ **13. (ENEM)** Sob a orientação de um mestre de obras, João e Pedro trabalharam na reforma de um edifício. João efetuou reparos na parte hidráulica nos andares 1, 3, 5, 7, e assim sucessivamente, de dois em dois andares. Pedro trabalhou na parte elétrica nos andares 1, 4, 7, 10, e assim sucessivamente, de três em três andares. Coincidentemente, terminaram seus trabalhos no último andar. Na conclusão da reforma, o mestre de obras informou, em seu relatório, o número de andares do edifício.

Sabe-se que, ao longo da execução da obra, em exatamente 20 andares, foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica por João e Pedro. Qual é o número de andares desse edifício?

a) 40
b) 60
c) 100
d) 115
e) 120

◯ **14. (ENEM)** O *slogan* "Se beber não dirija", muito utilizado em campanhas publicitárias no Brasil, chama a atenção para o grave problema da ingestão de bebida alcoólica por motoristas e suas consequências para o trânsito. A gravidade desse problema pode ser percebida observando como o assunto é tratado pelo Código de Trânsito Brasileiro. Em 2013, a quantidade máxima de álcool permitida no sangue do condutor de um veículo, que já era pequena, foi reduzida, e o valor da multa para motoristas alcoolizados foi aumentado. Em consequência dessas mudanças, observou-se queda no número de acidentes registrados em uma suposta rodovia nos anos que se seguiram às mudanças implantadas em 2013, conforme dados no quadro.

Ano	2013	2014	2015
Número total de acidentes	1050	900	850

Suponha que a tendência de redução no número de acidentes nessa rodovia para os anos subsequentes seja igual à redução absoluta observada de 2014 para 2015. Com base na situação apresentada, o número de acidentes esperados nessa rodovia em 2018 foi de:

a) 150.
b) 450.
c) 550.
d) 700.
e) 800.

◯ **15. (ENEM)** Em uma determinada estrada existem dois telefones instalados no acostamento: um no quilômetro 30 e outro no quilômetro 480. Entre eles serão colocados mais 8 telefones, mantendo-se entre dois telefones consecutivos sempre a mesma distância. Qual a sequência numérica que corresponde à quilometragem em que os novos telefones serão instalados?

a) 30, 90, 150, 210, 270, 330, 390, 450
b) 75, 120, 165, 210, 255, 300, 345, 390
c) 78, 126, 174, 222, 270, 318, 366, 414
d) 80, 130, 180, 230, 280, 330, 380, 430
e) 81, 132, 183, 234, 285, 336, 387, 438

◯ **16. (ENEM)** A cada dia que passa, um aluno resolve 2 exercícios a mais do que resolveu no dia anterior. Ele completou seu 11º dia de estudo e resolveu 22 exercícios. Seu objetivo é resolver, no total, pelo menos 272 exercícios. Mantendo seu padrão de estudo, quantos dias ele ainda precisa para atingir sua meta?

a) 5
b) 6
c) 9
d) 16
e) 20

◯ **17. (UFSM)** O problema a seguir, traduzido de uma rima inglesa datada do século XVIII, aparece no filme Die Hard (1995) onde o ator Bruce Willis tem que resolvê-lo para impedir a explosão de uma bomba.

"A caminho de St. Ives,
Encontrei um homem com sete esposas;
Cada esposa tinha sete sacos,
Cada saco tinha sete gatos,
Cada gato tinha sete gatinhos.
Gatinhos, gatos, sacos e esposas,
Quantos iam a caminho de St. Ives?"

A resposta correta é:

a) 28.
b) 49.
c) 2401.
d) 2800.
e) 4900.

◯ **18. (UFSM)** O diretório acadêmico de uma Universidade organizou palestras de esclarecimento sobre o plano de governo dos candidatos a governador. O anfiteatro, onde foram realizados dos encontros, possuía 12 filas de poltronas distribuídas da seguinte forma: na primeira fila 21 poltronas, na segunda 25, na terceira 29, e assim sucessivamente. Sabendo que, num determinado dia, todas as poltronas foram ocupadas e que 42 pessoas ficaram em pé, o total de participantes, excluído o palestrante, foi de

a) 474
b) 516
c) 557
d) 558
e) 559

◯ **19. (UFSM)** A sequência de números reais (x, y, z, t) forma, nessa ordem, uma progressão aritmética cuja soma dos termos é 160; a sequência de números reais (x, y, w, u) forma, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão 3. Assim, a soma t + u é:

a) 440
b) 340
c) 240
d) 140
e) 40

◯ **20. (UFSM)** O salário de um operário é combinado do seguinte modo: no 1° dia de trabalho, ele recebe R$ 1,00; no 2o dia, R$ 2,00; no 3° dia, R$ 3,00 e assim sucessivamente. Se ele trabalhar exatamente 100 dias consecutivos, ao final desse período, ele recebe, em reais,

a) 5020
b) 5031
c) 5040
d) 5050
e) 5061

◯ **21. (UFSM)** Uma indústria produziu 10.000 unidades de um certo produto em janeiro de 2007. Supondo que a produção aumente em 50 unidades a cada mês, pode-se afirmar que:

I. a sequência de unidades produzidas a cada mês forma uma progressão geométrica (PG) de razão 50.

II. o número total de unidades produzidas é, ao final do primeiro ano, de 123.300 unidades.

III. a produção de 10.750 unidades por mês ocorrerá em abril de 2008.

Está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s)

a) I apenas.
b) II apenas.
c) I e II apenas.
d) II e III apenas.
e) I, II e III.

◯ **22. (UFSM)** Aquiles persegue uma tartaruga. A velocidade dele é igual a 10 vezes a velocidade da tartaruga. A distância que os separa é 100 metros. Nessas condições, quando Aquiles vencer os 100 metros, a tartaruga terá corrido 1/10 do que Aquiles percorreu e ficará 10 metros à sua frente. Quando Aquiles correr esses 10 metros, a tartaruga terá percorrido 1/10 dessa distância e ficará 1 metro à sua frente, e assim por diante. Então, a distância que Aquiles deverá correr para alcançar a tartaruga será, em metros, de

a) 1.000
b) $\frac{1.010}{9}$
c) 112
d) $\frac{1.000}{9}$
e) 110

◯ **23. (UFSM)** Um surto de gripe A (H1N1) se inicia numa pequena cidade, a partir do retorno de um de seus moradores, que estivera em viagem a uma região endêmica.

Sabendo que cada pessoa pode ser contaminada uma única vez e considerando que o número de novos casos da gripe A triplique a cada dia, o número total de pessoas portadoras de gripe A, após 5 dias do início do surto na cidade, será igual a

a) 729.
b) 364.
c) 243.
d) 122.
e) 81.

◯ **24. (UFSM)** As doenças cardiovasculares são a principal causa de morte em todo mundo. De acordo com os dados da Organização Mundial da Saúde, 17,3 milhões de pessoas morreram em 2012, vítimas dessas doenças. A estimativa é que, em 2030, esse número seja de 23,6 milhões. Suponha que a estimativa para 2030 seja atingida e considere (a_n), $n \in N$, a sequência que representa o número de mortes (em milhões de pessoas) por doenças cardiovasculares no mundo, com n = 1 correspondendo a 2012, com n = 2 correspondendo a 2013 e assim por diante. Se (a_n) e uma progressão aritmética, então o 8° termo dessa sequência, em milhões de pessoas, e igual a

a) 19,59.
b) 19,61.
c) 19,75.
d) 20,10.
e) 20,45.

◯ **25. (UFSM)** Em 2011, o Ministério da Saúde firmou um acordo com a Associação das Indústrias de Alimentação (Abio) visando a uma redução de sódio nos alimentos industrializados. A meta é acumular uma redução de 28.000 toneladas de sódio nos próximos anos. Suponha que a redução anual de sódio nos alimentos industrializados, a partir de 2012, seja dada pela sequência:

(1.400, 2.000, 2.600,..., 5.600)

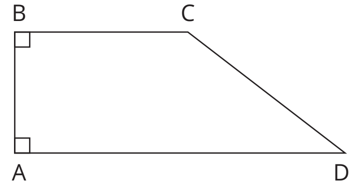
Assim, assinale verdadeira (V) ou falsa (F) em cada uma das afirmações a seguir.

( ) A sequência é uma progressão geométrica de razão 600.
( ) A meta será atingida em 2019.
( ) A redução de sódio nos alimentos industrializados acumulada até 2015 será de 3.200 toneladas.

A sequência correta é:

a) F - V - V.
b) V - F - V.
c) V - V - F.
d) F - V - F.
e) F - F - V.

◯ **26. (UFSM)** A figura a seguir representa um trapézio retângulo no qual as medidas dos lados AB, BC e CD estão em P.A. e medem, respectivamente, x, 2x - 2 e 8 - x. Nessa s condições, a medida do lado AD vale



a) 8.
b) 6.
c) 5.
d) 4.
e) 3.

◯ **27. (UFSM)** Um navio encalhado provoca, em torno de si, um vazamento circular de óleo. Constatou-se, ao fim do 1° dia de vazamento, que o raio da mancha de óleo media r metros. Verificou-se, ainda, que o raio da mancha de óleo dobrava a cada 24 horas. Nessas condições, a razão da área da mancha de óleo ao fim do 7º dia pela área da mancha no fim do 1º dia é:

a) 14
b) 28
c) 2^7
d) 2^8
e) 2^{12}

◯ **28. (UFSM)** A sequência (x, y, 15) é uma P.A. de razão r, e a seqüência (x, y, 20) é uma P.G. decrescente de razão q. Então:

a) r + q = -47/3
b) r + q = -43/3
c) r + q = -40/3
d) r + q = 47/3
e) r + q = 33/2

◯ **29. (UFSM)** Uma colméia nova tem 8000 abelhas. Destas, a cada dia que passa, morrem 200. Do 21° dia em diante, nascem diariamente 2000 abelhas que vivem, em média, 40 dias. Após um certo tempo, o número de abelhas dessa colméia se estabilizará em, aproximadamente,

a) 38000
b) 40000
c) 60000
d) 80000
e) 100000

◯ **30. (UFSM)** Uma fábrica de implementos agrícolas vinha produzindo, mensalmente, um certo número de plantadeiras. Prevendo que em 6 meses, na época do plantio, a demanda seria maior, resolveu aumentar a produção de 10 unidades por mês em relação ao mês anterior. Se a produção total, durante estes seis meses, foi de 282 unidades, quantas unidades foram produzidas no primeiro mês?

a) 10
b) 22
c) 25
d) 36
e) 60

◯ **31. (UFSM)** No trecho de maior movimento de uma rodovia, ou seja, entre o km 35 e o km e o 41, foram colocados outdoors educativos de 300 em 300 metros. Como o primeiro foi colocado exatamente a 50 metros após o Km 35, a distância entre o 13° outdoor e KM 41 é?

a) 3700
b) 3650
c) 2750
d) 2350
e) 2150

◯ **32. (UFSM)** Uma fábrica vendia 12 camisetas por mês para certa rede de academias, desde janeiro de um determinado ano. Devido ao verão, essa venda foi triplicada a cada mês, de setembro a dezembro. O total de camisetas vendidas nesse quadrimestre e a média de vendas, por mês, durante o ano, foram, respectivamente,

a) 1536 e 128
b) 1440 e 128
c) 1440 e 84
d) 480 e 84
e) 480 e 48

◯ **33. (UFSM)** A tabela mostra o número de pessoas que procuraram serviços de saúde, segundo o local, numa determinada cidade.

Local \ Ano	2001	2002	2003	2004	2005
Postos e Centros de Saúde	2.000	4.000	8.000	16.000	32.000
Clínicas Privadas	4.200	5.400	6.600	7.800	9.000
Clínicas Odontológicas	857	854	851	848	845

Supõe-se que esse comportamento é mantido nos próximos anos. Partindo dos dados, fazem-se as seguintes afirmações:

I. O número de pessoas que procuraram Postos e Centros de Saúde cresceu em progressão geométrica de razão 2.000.

II. O total de pessoas que procuraram atendimento em Clínicas Privadas de 2001 até 2011 é igual a 112.200.

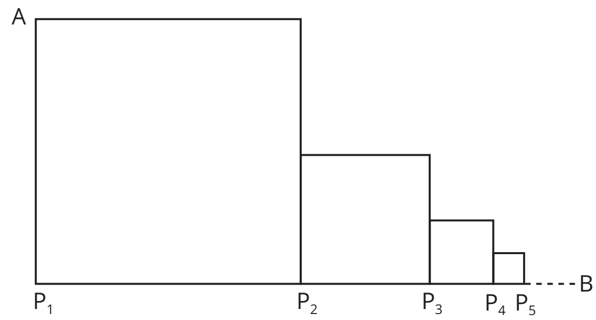
III. Em 2011, o número de atendimentos em Clínicas Odontológicas é igual a 827.

Está(ão) correta(s):

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas I e III.
d) apenas II e III.
e) I, II e III.

◯ **34. (UFRGS)** A figura a seguir é formada por quadrados de lados $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$, e assim sucessivamente.

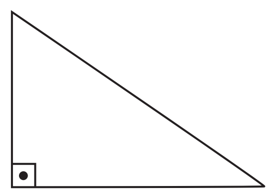
A construção é tal que os pontos P_1, P_2, P_3, ..., B são colineares, e as bases dos quadrados tem medidas $\overline{P_1P_2} = 1$, $\overline{P_2P_3} = \frac{1}{2}$ $\overline{P_3P_4} = \frac{1}{4}$ e assim por diante. O ponto A é vértice do quadrado de lado $\overline{P_1P_2}$, como representado na figura abaixo.



A medida do segmento AB é:

a) 1
b) $\sqrt{2}$
c) $\sqrt{3}$
d) 2
e) $\sqrt{5}$

◯ **35. (UFRGS)** O perímetro de um triângulo retângulo é 48 cm, e seus lados estão em PA. A área do triângulo, em cm^2, é igual a:



a) 108
b) 96
c) 64
d) 54
e) 48

◯ **36. (UFRGS)** As medidas dos três lados de um triângulo retângulo são números em progressão aritmética. Qual o valor da área do triângulo, sabendo-se que o menor lado mede 6?

a) $12\sqrt{2}$
b) 18
c) $20\sqrt{2}$
d) 24
e) 30

◯ **37. (UFRGS)** Os três primeiros termos de uma sequência aritmética estão representados por $(2x + 5, x - 4, 3x - 1)$. O valor da razão dessa sequência é:

a) -3
b) -2
c) 3
d) 2
e) -5

◯ **38. (UFRGS)** As medidas dos lados de um triângulo são expressas por $x + 1$, $2x$, $x^2 - 5$ e estão em PA, nesta ordem. O perímetro do triângulo é:

a) 8
b) 12
c) 15
d) 24
e) 33

◯ **39. (UFRGS)** Em uma progressão aritmética, em que o primeiro termo é 23 e a razão é -6, a posição ocupada pelo elemento -13 é:

a) 8ª
b) 7ª
c) 6ª
d) 5ª
e) 4ª

◯ **40. (UFRGS)** Se $a_1, a_2, ..., a_{100}$ é uma progressão aritmética de razão **r**, então a sequência $a_1 - a_{100}, a_2 - a_{99}, ..., a_{50} - a_{51}$ é uma progressão:

a) geométrica de razão 2r.
b) geométrica de razão r.
c) aritmética de razão -r.
d) aritmética de razão r.
e) aritmética de razão 2r.

◯ **41. (UFRGS)** O termo geral de uma progressão é $a_n = 5n - 3$. A soma dos 15 primeiros termos é:

a) 72
b) 375
c) 555
d) 615
e) 1.080

◯ **42. (UFRGS)** Em uma escola, as turmas de ensino médio totalizam 231 estudantes. Para uma atividade festiva na escola, todos esses estudantes foram dispostos em filas, obedecendo à seguinte disposição: 1 estudante na primeira fila, 2 estudantes na segunda fila, 3 estudantes na terceira fila, e assim sucessivamente. O número de filas que foram formadas com todos os estudantes é:

a) 19.
b) 21.
c) 22.
d) 23.
e) 25.

◯ **43. (UFRGS)** O quociente entre o último e o primeiro termo de uma sequência de números é 1.000. Os logaritmos decimais dos termos dessa sequência formam uma progressão aritmética de razão 1/2. Então, o número de termos da sequência é:

a) 3.
b) 4.
c) 5.
d) 6.
e) 7.

◯ **44. (UFSM)** Um quadrado de área A_1 está contido no interior de um outro maior de área $A_1 + A_2$. Se o lado do quadrado maior é 9 cm, e os números $A_1, A_2, A_1 + A_2$ formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, então o lado do menor quadrado mede, em centímetros:

a) $\sqrt{3}$
b) 3
c) $2\sqrt{3}$
d) $3\sqrt{3}$
e) 4,5

◯ **45. (UFSM)** A soma dos 100 primeiros números pares positivos é:

a) 5.050
b) 5.100
c) 6.360
d) 10.050
e) 10.100

◯ **46. (UFSM)** Considere a PA cujo termo geral é $a_n = \frac{7+n}{2}$ com $n \in N^*$.

Então, a razão e a soma dos 6 primeiros termos dessa PA são, respectivamente:

a) 2; $\frac{63}{2}$
b) $\frac{1}{2}$; $\frac{63}{2}$
c) 1; $\frac{51}{2}$
d) $\frac{1}{2}$; $\frac{51}{2}$
e) 2; $\frac{51}{2}$

◯ **47. (UFSM)** Em uma progressão aritmética crescente, os dois primeiros termos são as raízes da equação $x^2 + 2x - 8 = 0$. Sabendo que o número de termos dessa PA é igual ao triplo da sua razão, então a soma dos termos dessa PA é igual a:

a) -378
b) -282
c) 98
d) 294
e) 846

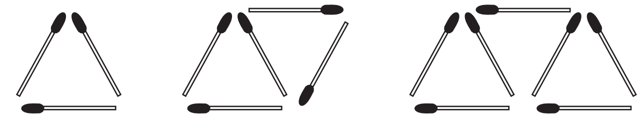
◯ **48. (UFSM)** Com o objetivo de conscientizar a comunidade para a necessidade de preservação do meio ambiente, integrando pais, alunos e profissionais da educação, a direção de uma escola implantou o programa "Lixo reciclado na escola". A cada semana, os alunos levam à escola materiais recicláveis que, após serem separados, serão comercializados, e o dinheiro obtido será aplicado em melhorias na própria instituição de ensino. Suponha que, na primeira semana, seja recolhido somente 1 kg de alumínio e, com a divulgação do projeto, aumente em 2 kg a cada semana. Então, após 52 semanas, o total de alumínio recolhido, em kg, é igual a:

a) 103
b) 2.602
c) 2.704
d) $2^{52} - 1$
e) 2^{52}

◯ **49. (UFSM)** Ao efetuar-se a adição dos primeiros 61 termos da PA (100, 104, 108, 112, ...), por descuido, omitiu-se o 41º termo. Assim, a soma obtida foi:

a) 13.410
b) 13.420
c) 13.160
d) 13.680
e) 13.690

◯ **50. (UFRGS)** Considere o padrão de construção de triângulos com palitos, representado nas figuras abaixo.



Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3

Na etapa **n**, serão utilizados 245 palitos. Nessas condições, **n** é igual a:

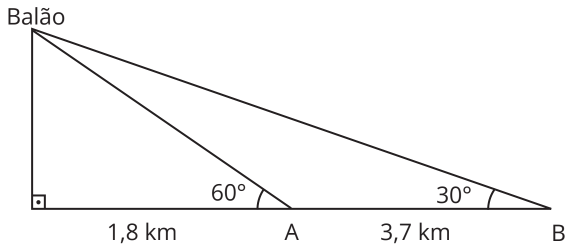
a) 120.
b) 121.
c) 122.
d) 123.
e) 124.

Anotações:

HABILIDADES À PROVA 2

» *Trigonometria*

◯ **1. (ENEM)** Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

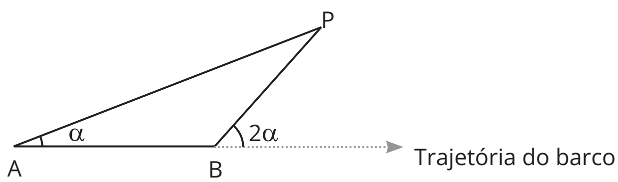


Disponível em: www.correiodobrasil.com.br. Acesso em: 02 maio 2010.

Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°. Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

a) 1,8 km
b) 1,9 km
c) 3,1 km
d) 3,7 km
e) 5,5 km

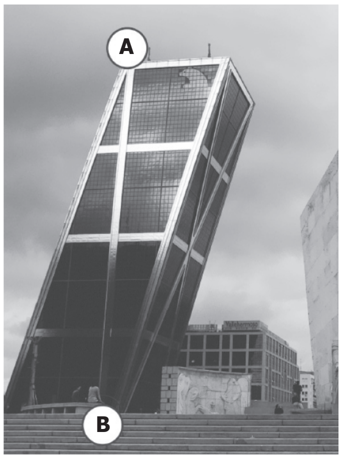
◯ **2. (ENEM)** Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo α = 30° e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2.000 m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será:

a) 1.000 m
b) $1.000\sqrt{3}$ m
c) $2.000\frac{\sqrt{3}}{3}$ m
d) 2.000 m
e) $2.000\sqrt{3}$ m

◯ **3. (ENEM)** As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas em uma avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15º com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Essas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

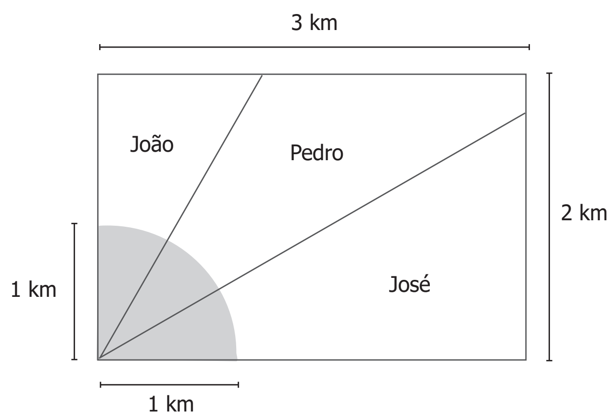


Disponível em: www.flickr.com. Acesso em: 27 mar. 2012.

Utilizando 0,26 como valor aproximado para tangente de 15º e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa, na avenida, um espaço:

a) menor que 100 m^2.
b) entre 100 m^2 e 300 m^2.
c) entre 300 m^2 e 500 m^2.
d) entre 500 m^2 e 700 m^2.
e) maior que 700 m^2.

◯ **4. (ENEM)** Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km x 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.

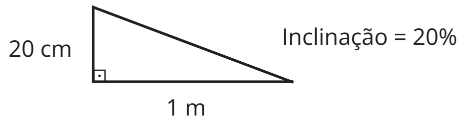


Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a:

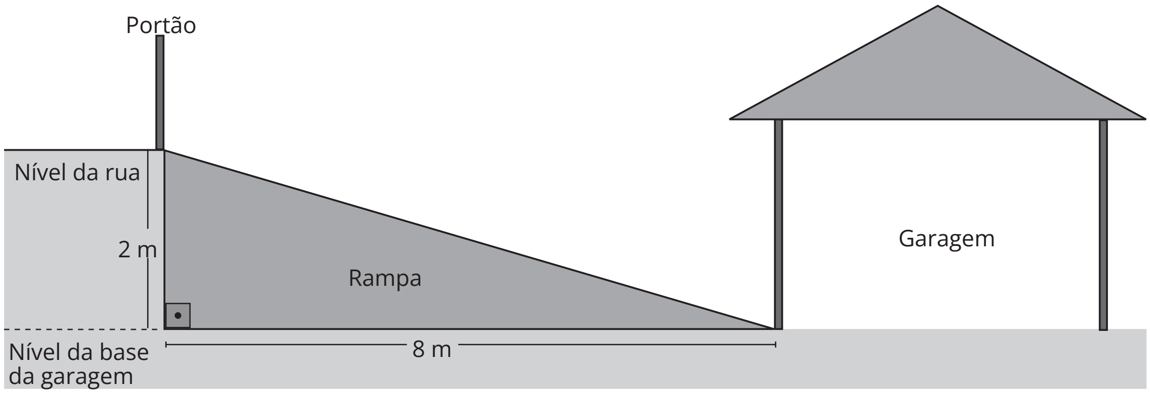
(Considere $\frac{\sqrt{3}}{3}$ = 0,58.)

a) 50%
b) 43%
c) 37%
d) 33%
e) 19%

◯ **5. (ENEM)** A inclinação de uma rampa é calculada da seguinte maneira: para cada metro medido na horizontal, mede-se x centímetros na vertical. Diz-se, nesse caso, que a rampa tem inclinação de x%, como no exemplo da figura:



A figura apresenta um projeto de uma rampa de acesso a uma garagem residencial cuja base, situada 2 metros abaixo do nível da rua, tem 8 metros de comprimento.



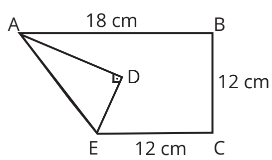
Depois de projetada a rampa, o responsável pela obra foi informado de que as normas técnicas do município onde ela está localizada exigem que a inclinação máxima de uma rampa de acesso a uma garagem residencial seja de 20%.

Se a rampa projetada tiver inclinação superior a 20%, o nível da garagem deverá ser alterado para diminuir o percentual de inclinação, mantendo o comprimento da base da rampa.

Para atender às normas técnicas do município, o nível da garagem deverá ser:

a) elevado em 40 cm.
b) elevado em 50 cm.
c) mantido no mesmo nível.
d) rebaixado em 40 cm.
e) rebaixado em 50 cm.

◯ **6. (ENEM)** Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do origami (*ori* = dobrar; *kami* = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do origami é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do origami, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.

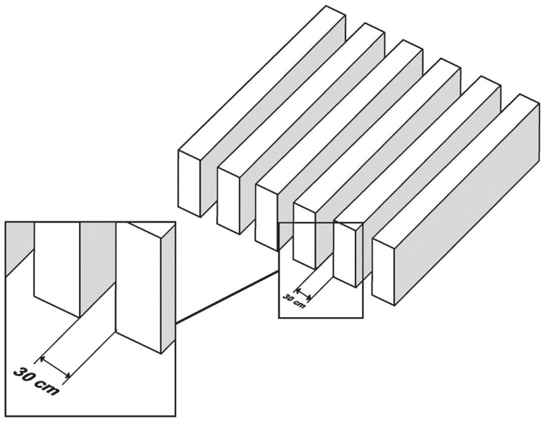


Após essa primeira dobradura, a medida do segmento *AE* é:

a) $2\sqrt{22}$ cm.
b) $6\sqrt{3}$ cm.
c) 12 cm.
d) $6\sqrt{5}$ cm.
e) $12\sqrt{2}$ cm.

Anotações:

◯ **7. (ENEM 2020)** Pergolado é o nome que se dá a um tipo de cobertura projetada por arquitetos, comumente em praças e jardins, para criar um ambiente para pessoas ou plantas, no qual há uma quebra da quantidade de luz, dependendo da posição do sol. É feito como um estrado de vigas iguais, postas paralelas e perfeitamente em fila, como ilustra a figura.



Um arquiteto projeta um pergolado com vãos de 30 cm de distância entre suas vigas, de modo que, no solstício de verão, a trajetória do sol durante o dia seja realizada num plano perpendicular à direção das vigas, e que o sol da tarde, no momento em que seus raios fizerem 30° com a posição a pino, gere a metade da luz que passa no pergolado ao meio-dia.

Para atender à proposta do projeto elaborado pelo arquiteto, as vigas do pergolado devem ser construídas de maneira que a altura, em centímetro, seja a mais próxima possível de

a) 9.

b) 15.

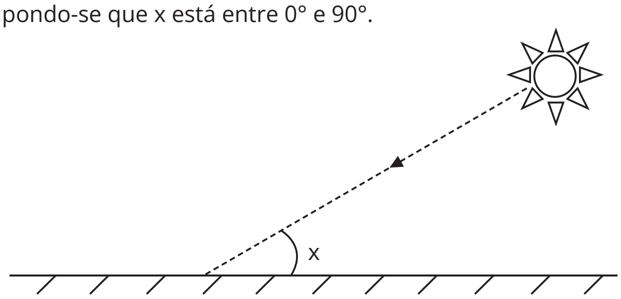
c) 26.

d) 52.

e) 60.

◯ **8. (ENEM)** Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com a sua superfície, conforme indica a figura.

Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x) = k \cdot \text{sen}(x)$, sendo k uma constante, e supondo-se que x está entre 0° e 90°.



Quando x = 30°, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

a) 33%

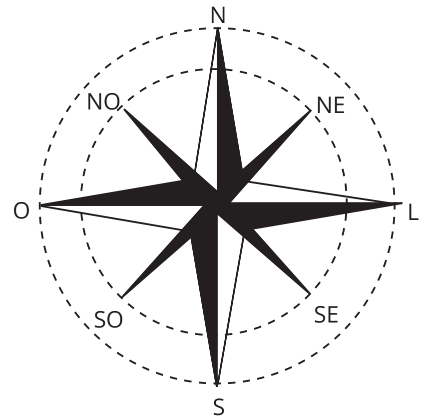
b) 50%

c) 57%

d) 70%

e) 86%

◯ **9. (ENEM)** A rosa dos ventos é uma figura que representa oito sentidos, que dividem o círculo em partes iguais.



Uma câmera de vigilância está fixada no teto de um shopping e sua lente pode ser direcionada remotamente, através de um controlador, para qualquer sentido. A lente da câmera está apontada inicialmente no sentido Oeste, e seu controlador efetua três mudanças consecutivas, a saber:

1ª mudança: 135° no sentido anti-horário;

2ª mudança: 60° no sentido horário;

3ª mudança: 45° no sentido anti-horário.

Após a 3ª mudança, ele é orientado a reposicionar a câmera, com a menor amplitude possível, no sentido Noroeste (NO), devido a um movimento suspeito de um cliente.

Qual mudança de sentido o controlador deve efetuar para reposicionar a câmera?

a) 75° no sentido horário.

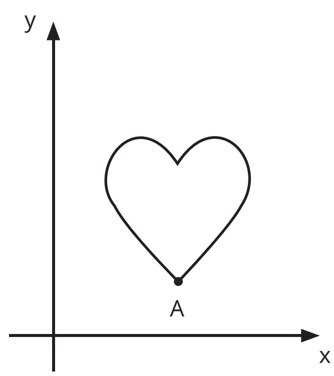
b) 105° no sentido anti-horário.

c) 120° no sentido anti-horário.

d) 135° no sentido anti-horário.

e) 165° no sentido horário.

◯ **10. (ENEM**) Isometria é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura, mantém as distâncias entre pontos. Duas das transformações isométricas são a reflexão e a rotação. A reflexão ocorre por meio de uma reta chamada eixo. Esse eixo funciona como um espelho, a imagem refletida é o resultado da transformação. A rotação é o "giro" de uma figura ao redor de um ponto chamado centro de rotação. A figura sofreu cinco transformações isométricas, nesta ordem:



1ª) Reflexão no eixo x;

2ª) Rotação de 90 graus no sentido anti-horário, com centro de rotação no ponto A;

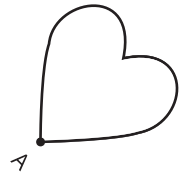
3ª) Reflexão no eixo y;

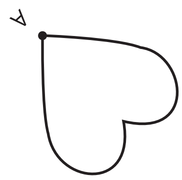
4ª) Rotação de 45 graus no sentido horário, com centro de rotação no ponto A;

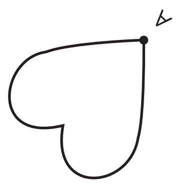
5ª) Reflexão no eixo x.

Disponível em: www.pucsp.br. Acesso em: 2 ago. 2012.

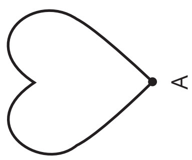
Qual a posição final da figura?

a)


b)


c)


d)


e)


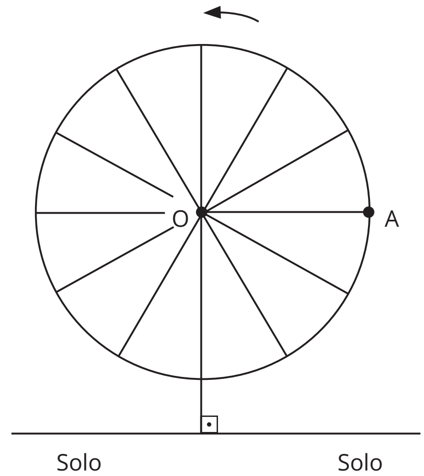
◯ **11. (ENEM)** Um satélite de telecomunicações, **t** minutos após ter atingido sua órbita, está a **r** quilômetros de distância do centro da Terra. Quando **r** assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de **r** em função de **f** seja dado por:

$$r(t) = \frac{5.865}{1 + 0,15 \cdot \cos(0,06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de **r**, no apogeu e no perigeu, representada por S. O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de:

a) 12.765 km
b) 12.000 km
c) 11.730 km
d) 10.965 km
e) 5.865 km

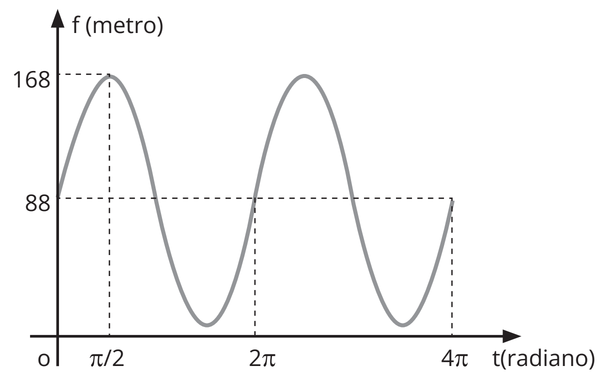
◯ **12. (ENEM)** Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a *High Roller*, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



Disponível em: http://en.wikipedia.org. Acesso em: 22 abr. 2014 (adaptado).

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a *High Roller* no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam **t** o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e **f** a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de **t**.

Após duas voltas completas, **f** tem o seguinte gráfico:

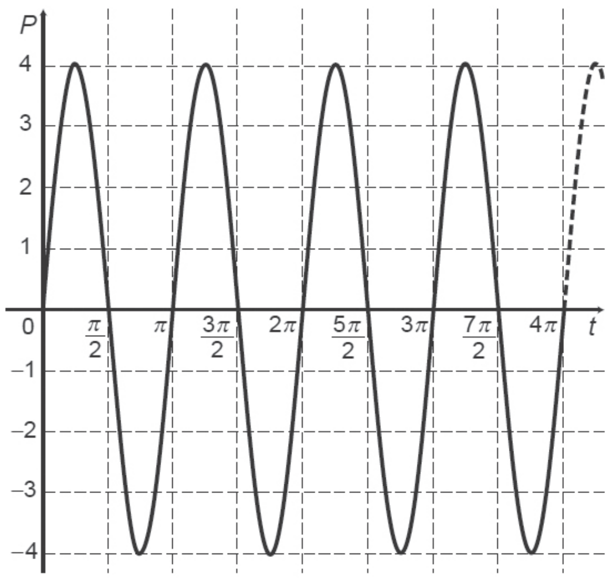


A expressão da função altura é dada por:

a) f{t) = 80sen(t) + 88
b) f(t) = 80cos(t) + 88
c) f(t) = 88cos(f) + 168
d) f(t) = 168sen(t) + 88cos(t)
e) f(t) = 88sen(t) + 168cos(t)

13. (ENEM) Os movimentos ondulatórios (periódicos) são representados por equações do tipo ±A sen(wt + q), que apresentam parâmetros com significados físicos importantes, tais como a frequência $w = \frac{2\pi}{T}$, em que T é o período; A é a amplitude ou deslocamento máximo; θ é o ângulo de fase $0 \leq \theta < \frac{2\pi}{W}$, que mede o deslocamento no eixo horizontal em relação à origem no instante inicial do movimento.

O gráfico representa um movimento periódico, P = P(t), em centímetro, em que P é a posição da cabeça do pistão do motor de um carro em um instante t, conforme ilustra a figura.



A expressão algébrica que representa a posição P(t), da cabeça do pistão, em função do tempo t, é:

a) P(t) = 4sen(2t)
b) P(t) = -4sen(2t)
c) P(t) = -4sen(4t)
d) $P(t) = 4\text{sen}\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$
e) $P(t) = 4\text{sen}\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)$

14. (ENEM) Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo P(t) = A + Bcos(kt) em que A, B e K são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função P(t) obtida por esse cientista, ao analisar o caso específico foi:

a) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$
b) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$
c) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$
d) P(t) = 99 + 21 cos(t)
e) P(t) = 78 + 42 cos(f)

15. (ENEM) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

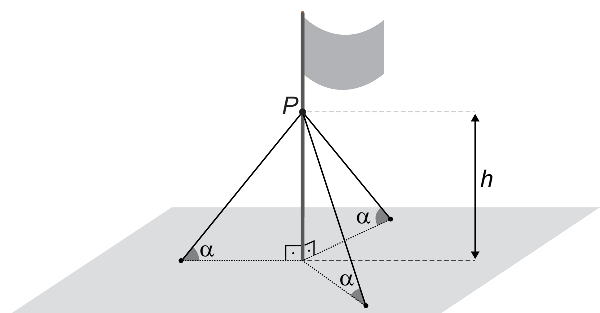
A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, em que x representa o mês do ano, sendo x = 1 associado ao mês de janeiro, x = 2 ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até x = 12 associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é:

a) janeiro.
b) abril.
c) junho.
d) julho.
e) outubro.

16. (ENEM) O mastro de uma bandeira foi instalado perpendicularmente ao solo em uma região plana. Devido aos fortes ventos, três cabos de aço, de mesmo comprimento, serão instalados para dar sustentação ao mastro. Cada cabo de aço ficará perfeitamente esticado, com uma extremidade num ponto *P* do mastro, a uma altura *h* do solo, e a outra extremidade, num ponto no chão, como mostra a figura.



Os cabos de aço formam um ângulo a com o plano do chão.

Por medida de segurança, há apenas três opções de instalação:

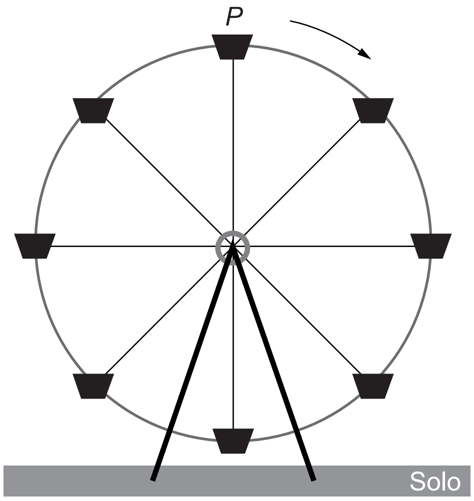
• opção I: *h* = 11 m e α = 30°
• opção II: *h* = 12 m e α = 45°
• opção III: *h* = 18 m e α = 60°

A opção a ser escolhida é aquela em que a medida dos cabos seja a menor possível.

Qual será a medida, em metro, de cada um dos cabos a serem instalados?

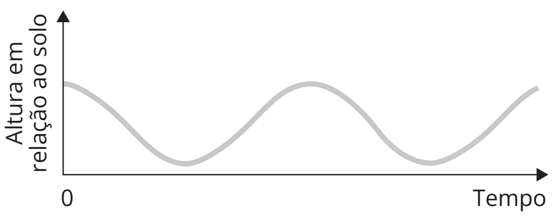
a) $\frac{22\sqrt{3}}{3}$
b) $11\sqrt{2}$
c) $12\sqrt{2}$
d) $12\sqrt{3}$
e) 22

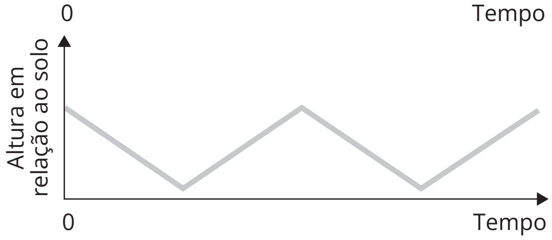
17. (ENEM) A figura ilustra uma roda-gigante no exato instante em que a cadeira onde se encontra a pessoa *P* está no ponto mais alto dessa roda-gigante.

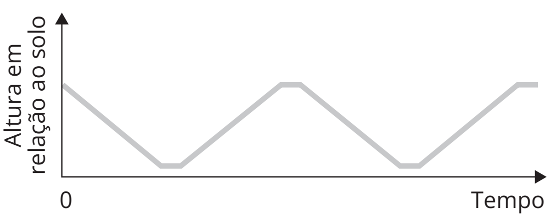


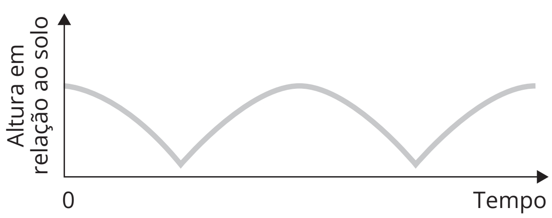
Com o passar do tempo, à medida que a roda-gigante gira, com velocidade angular constante e no sentido horário, a altura da cadeira onde se encontra a pessoa *P*, em relação ao solo, vai se alterando.

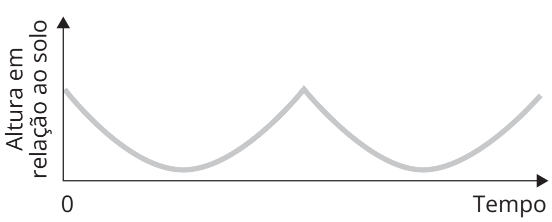
O gráfico que melhor representa a variação dessa altura, em função do tempo, contado a partir do instante em que a cadeira da pessoa P se encontra na posição mais alta da roda-gigante, é

a)


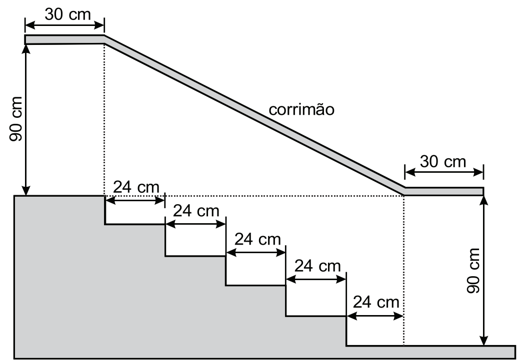
b)


c)


d)


e)


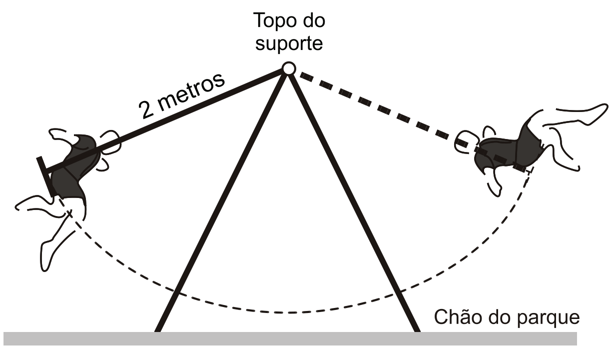
18. (ENEM)



Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:

a) 1,8 m.
b) 1,9 m.
c) 2,0 m.
d) 2,1 m.
e) 2,2 m.

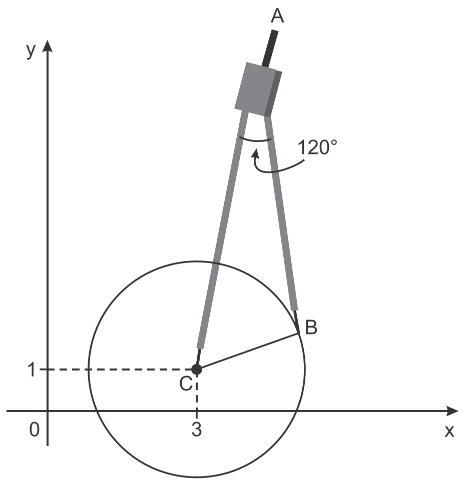
19. (ENEM) A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.



Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo X é paralelo ao chão do parque, e o eixo Y tem orientação positiva para cima. A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função

a) $f(x) = -\sqrt{2 - x^2}$
b) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$
c) $f(x) = x^2 - 2$
d) $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$
e) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

○ **20. (ENEM)** Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120°. A ponta seca está representada pelo ponto C a ponta do grafite está representada pelo ponto B e a cabeça do compasso está representada pelo ponto A conforme a figura.



Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

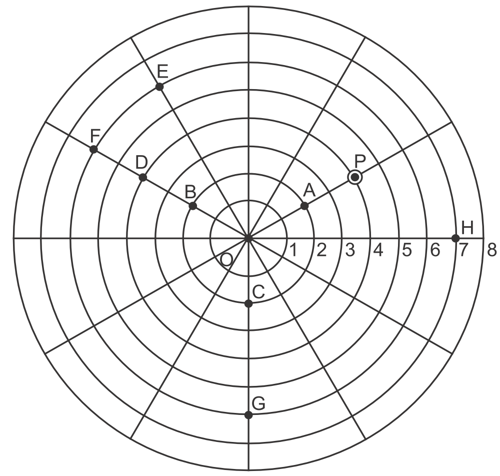
Tipo de material	Intervalo de valores de raio
I	$0 < R \leq 5$
II	$5 < R \leq 10$
III	$10 < R \leq 15$
IV	$15 < R \leq 21$
V	$21 < R \leq 40$

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$. O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será:

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

Anotações:

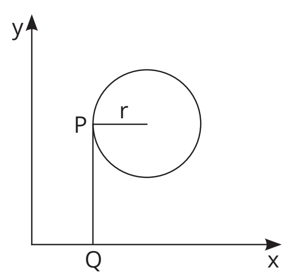
○ **21. (ENEM)** No jogo mostrado na figura, uma bolinha desloca-se somente de duas formas: ao longo de linhas retas ou por arcos de circunferências centradas no ponto O e raios variando de 1 a 8. Durante o jogo, a bolinha que estiver no ponto P deverá realizar a seguinte sequência de movimentos: 2 unidades no mesmo sentido utilizado para ir do ponto O até o ponto A e, no sentido anti-horário, um arco de circunferência cujo ângulo central é 120°.



Após a sequência de movimentos descrita, a bolinha estará no ponto:

a) B.
b) D.
c) E.
d) F.
e) G.

○ **22. (ENEM)** Considere um ponto P em uma circunferência de raio r no plano cartesiano. Seja Q a projeção ortogonal de P sobre o eixo x, como mostra a figura, e suponha que o ponto P percorra, no sentido anti-horário, uma distância $d \leq r$ sobre a circunferência.



Então, o ponto Q percorrerá, no eixo x, uma distância dada por:

a) $r\left(1 - \operatorname{sen}\dfrac{d}{r}\right)$.

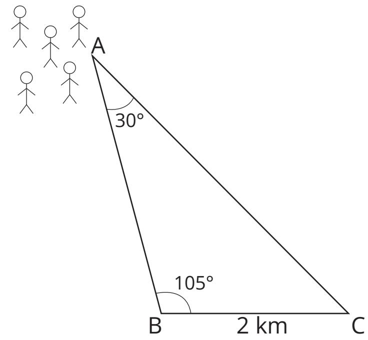
b) $r\left(1 - \cos\dfrac{d}{r}\right)$.

c) $r\left(1 - \operatorname{tg}\dfrac{d}{r}\right)$.

d) $r\operatorname{sen}\left(\dfrac{r}{d}\right)$.

e) $r\cos\left(\dfrac{r}{d}\right)$.

◯ **23. (UFSM)** O grupo de alunos participará de uma trilha em uma reserva ecológica. A equipe deverá sair do ponto A e chegar até o ponto C, conforme a figura. Como o percurso não poderá ser feito diretamente, os alunos deverão sair de A e passar por B para, depois, chegara C. Com isso, a distância, em km, a ser percorrida pelos estudantes é igual a:



a) $\sqrt{2} + 2$
b) $2\sqrt{6} + 2$
c) $2(\sqrt{2} + 1)$
d) $2(\sqrt{2} + \sqrt{6})$
e) $2\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3} + 1\right)$

◯ **24. (UFSM)** Na entrada de uma biblioteca, uma rampa retangular inclinada faz um ângulo de 15° com o piso horizontal e tem 2 metros de altura. O comprimento dessa rampa é, em metros, igual a:

> *Observação: use a identidade trigonométrica*
> *sen (a - b) = sen (a) · cos (b) - sen (b) · cos (a)*

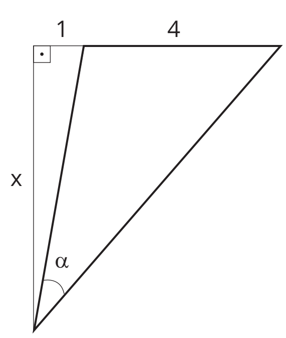
a) $2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.
b) $\sqrt{6} + .1$
c) $4(\sqrt{3} + 1)$.
d) $2(\sqrt{3} - 1)$.
e) $2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

◯ **25. (UFSM)** Algumas dificuldades de aprendizagem podem estar relacionadas com problemas visuais que o aluno tem devido ao seu posicionamento em sala de aula.

Em uma sala de aula, um aluno está sentado próximo à parede, de frente para o quadro-negro. O quadro tem 4 m de comprimento e começa a 1 m dessa parede (conforme a figura).

Dado:

$$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$$



Se o aluno está a x metros da parede onde está o quadro, então o ângulo de visão a pode ser expresso por

a) $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

b) $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{x^2 + 25}}{x}$

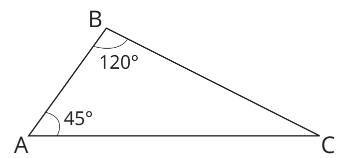
c) $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{x^2 + 1}}$

d) $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{x}{x^2 + 25}$

e) $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{4x}{x^2 + 5}$

◯ **26. (UFSM)**

Sugestão: 15° = 60° - 45°



No triângulo ABC dado, tem-se $\overline{AB}$ = 20 m. O valor de $\overline{BC}$, em metros, é:

a) $10\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$

b) $15(\sqrt{3} - 1)$
c) $20(\sqrt{3} + 1)$
d) $30(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

e) $40\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$

◯ **27. (UFSM)** Para investigar a razão entre as distâncias da Terra ao Sol e da Terra à Lua, o astrônomo grego Aristarco de Samos observou que, quando a Lua está no quarto crescente, o triângulo TLS (sendo T um observador na Terra, L o centro da Lua e S o centro do Sol) é retângulo em L.

Sabendo que a medida do ângulo $\hat{S}$ é 0,15°, pode-se afirmar que essa razão é igual a

a) $\dfrac{1}{\text{sen}\,0{,}15°}$

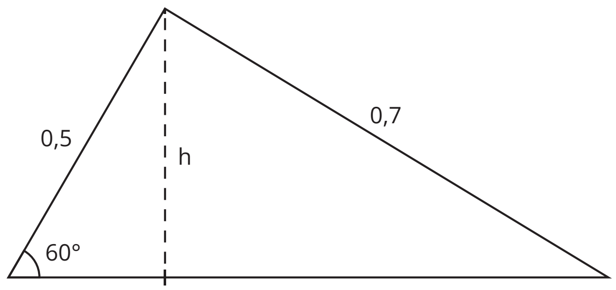
b) cos 0,15°
c) tg o,15°

d) $\dfrac{1}{\cos 0{,}15°}$

e) cos 89,85°

Instrução: Para responder às questões 28 e 29, considere o texto e a figura a seguir.

No primeiro semestre de 2023, houve um aumento considerável no número de queimadas na Amazônia. A figura a seguir, cujas medidas são dadas em quilômetros, representa uma região atingida por um incêndio.



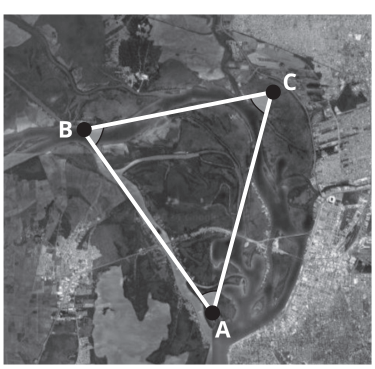
◯ **28. (UFSM)** Qual é o perímetro, em quilômetros, da região atingida pelo incêndio?

a) 1,5
b) 1,6
c) 1,8
d) 2,0
e) 2,3

◯ **29. (UFSM)** Qual é a área, em quilômetros quadrados, da região atingida pelo incêndio, usando $\sqrt{3} = 1,7$?

a) 0,170
b) 0,200
c) 0,250
d) 0,340
e) 0,425

◯ **30. (UFSM)** A figura a seguir apresenta o delta do rio Jacuí, situado na região metropolitana de Porto Alegre. Nele se encontra o parque estadual Delta do Jacuí, importante parque de preservação ambiental. Sua proximidade com a região metropolitana torna-o suscetível aos impactos ambientais causados pela atividade humana.



http://maps.google.com.br

A distância do ponto B ao ponto C é de 8 km, o ângulo $\hat{A}$ mede 45° e o ângulo $\hat{C}$ mede 75°. Uma maneira de estimar quanto do Delta do Jacuí está sob influência do meio urbano é dada pela distância do ponto A ao ponto C. Essa distância, em km, é:

a) $\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$

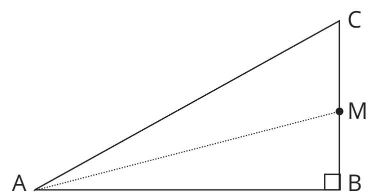
b) $4\sqrt{6}$

c) $8\sqrt{2} + \sqrt{3}$

d) $8(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

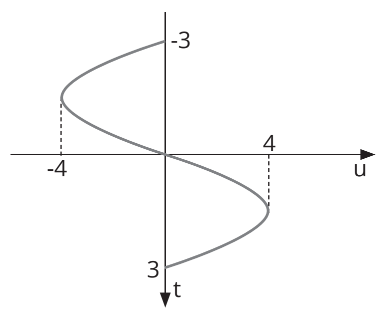
e) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

◯ **31. (UFSM)** A figura mostra um triângulo retângulo ABC. O segmento de reta AM é a bissetriz do ângulo $\hat{A}$. Se BM mede 1 m e AB mede 3 m, então a medida, em m, de MC é:



a) 1,32
b) 1,25
c) 1,18
d) 1,15
e) 1,00

◯ **32. (UFSM)** Considere que o programa de computador que gerou as imagens da série *Uma família da pesada* tenha utilizado o gráfico de uma senoide u(t) = A sen(ωt) para o posicionamento dos braços do personagem Peter, como mostra a figura a seguir.



Afirma-se, então:

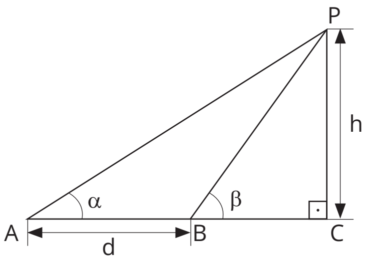
I - A amplitude é A = 4.
II - O período da função u(t) é 3.
III - A frequência angular é ω = π.

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas I e III.
d) apenas II e III.
e) I, II e III.

◯ **33. (UFSM)** A soma das raízes da equação $\cos^2 x + \cos x = 0$, no intervalo $0 < x < 2\pi$, é:

a) π
b) 4π
c) 3π
d) $7\pi/2$
e) $5\pi/2$

◯ **34. (UFSM)**



Para medir a altura de uma torre localizada em um terreno plano e horizontal, adotou-se o procedimento a seguir, que se encontra esquematizado na figura. Escolheram-se, no terreno, dois pontos A e B distantes d metros um do outro e alinhados com a base da torre C. Do ponto A, via-se o ponto P mais alto da torre, sob um ângulo de a graus com o plano horizontal. Do ponto B, via-se o ponto P sob um ângulo de b graus com o plano horizontal. A altura h da torre é, em metros,

a) $d\,\dfrac{\text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,\beta - \text{tg}\,\alpha}$

b) $d\,\dfrac{(\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,\beta - \text{tg}\,\alpha}$

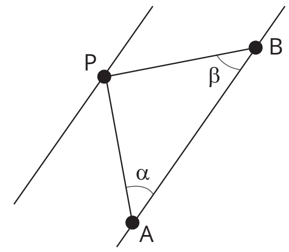
c) $d\,\dfrac{(\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,\beta \cdot \text{tg}\,\alpha}$

d) $\dfrac{1}{d}\,\dfrac{\text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}$

e) $d\,\dfrac{\text{tg}\,\beta - \text{tg}\,\alpha}{\text{tg}\,\beta + \text{tg}\,\alpha}$

Anotações:

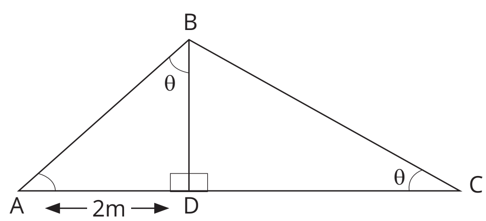
◯ **35. (UFSM)**



A figura ilustra um observador localizado no ponto A e outro, no ponto B, à beira de um rio de margens paralelas. Os dois conseguem ver uma pedra situada num ponto P da outra margem. Com seus teodolitos, eles medem os ângulos $P\hat{A}B = \alpha$ e $P\hat{B}A = \beta$. Sabendo que $\text{tg}\,\alpha = 4$, $\text{tg}\,\beta = 5$ e $AB = 135$ m, pode-se afirmar que a largura do rio, em metros, é:

a) 150
b) 200
c) 300
d) 350
e) 400

◯ **36. (UFSM)** Na figura, o ângulo θ é tal que $\text{sen}\,\theta = 1/3$ e AD = 2 metros.



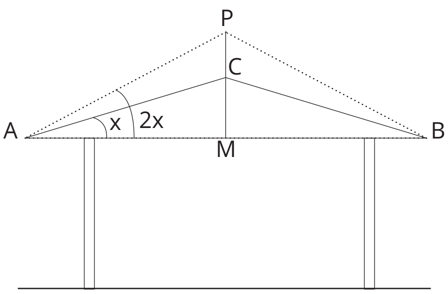
A área do triângulo ABC é, em m²,

a) $16\sqrt{2}$
b) $18\sqrt{2}$
c) $32\sqrt{2}$
d) $36\sqrt{2}$
e) $72\sqrt{2}$

◯ **37. (UFSM)** Um fio de antena está preso no topo de um prédio de 16 metros de altura e na cumeeira de uma casa ao lado, a 4 metros de altura. Considerando o terreno plano (horizontal) e sabendo que a distância entre a casa e o prédio é de 9 metros, o comprimento do fio é, em metros,

a) 12
b) 15
c) $\sqrt{337}$
d) 20
e) 25

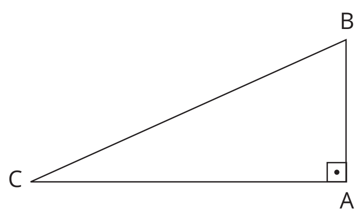
38. (UFSM)



Devido à pouca inclinação, o telhado do depósito, representado pela figura, apresentava goteiras. Foi consultado um engenheiro que sugeriu levantar a cumeeira, de modo que o ângulo x passasse para 2x. Sabendo que a medidas de AM e CM são, respectivamente, 12 m e 2 m, qual será, aproximadamente, a medida de PC ?

a) 1,88 m
b) 2 m
c) 2,11 m
d) 2,30 m
e) 3 m

39. (UFSM) Um piloto de avião decola da cidade A, devendo alcançar a cidade B, ao Norte de A, distante 600 Km. Porém, um tempo após a decolagem, o piloto notou que, por engano, tinha tomado o rumo Oeste. Ele corrigiu a rota fazendo um giro de 150º à direita, num ponto C , conforme mostra a figura.



Assim, a distância, em quilômetros, que o avião voou, partindo de A até chegar a B, é:

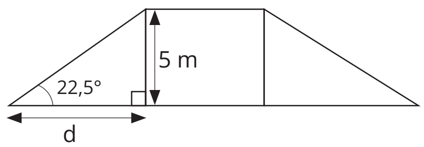
a) $600\sqrt{3}$.
b) $1200\sqrt{3}$.
c) $600(1 + \sqrt{3})$.
d) $100(12 + \sqrt{3})$.
e) $600(2 + \sqrt{3})$.

40. (UFSM) Para calcular a distância de um ponto B até um ponto inacessível, um observador escolheu um ponto A qualquer, desde que B e C possam ser vistos de A. Após, mediu as distâncias AB = 50 m e AC = 80 m e o ângulo BÂC = 60º.

Então a distância BC é igual a:

a) 50
b) 60
c) 70
d) 80
e) 90

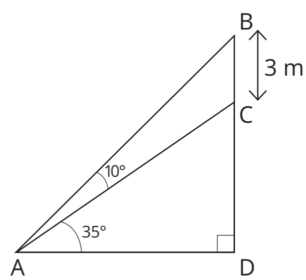
41. (UFSM)



Para facilitar o trânsito em um cruzamento muito movimentado, será construída uma ponte sobre a qual passará uma das vias. A altura da via elevada, em relação à outra, deverá ser de 5,0m. O ângulo da inclinação da via elevada, em relação ao solo, deverá ser de 22,5º. A distância d, em metros, onde deve ser iniciada a rampa que dará acesso à ponte, medida a partir da margem da outra via, conforme mostra a figura, deverá ser de:

a) $5(\sqrt{2} + 1)$
b) $\frac{5}{2}(\sqrt{2} - 1)$
c) $\frac{5}{3}(\sqrt{2} + 1)$
d) $\frac{5}{3}(\sqrt{3} - 1)$
e) $\frac{5}{4}(\sqrt{3} + 1)$

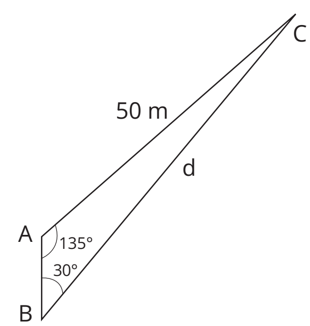
42. (UFSM) Se tg 35° = 0,7 e BC = 3m, então o comprimento do segmento CD, em metros, é



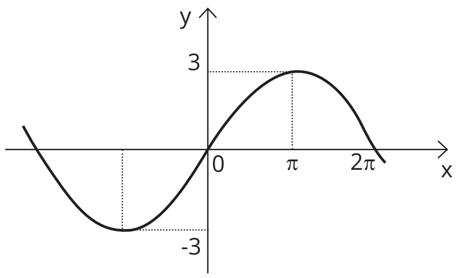
a) 6,8
b) 7
c) 7,2
d) 7,5
e) 7,6

43. (UFSM) Na instalação das lâmpadas da praça de alimentação, a equipe necessitou calcular corretamente a distância entre duas delas, colocadas nos vértices B e C do triângulo, segundo a figura. Assim, a distância “d” é

a) $50\sqrt{2}$ m
b) $50\frac{\sqrt{6}}{3}$ m
c) $50\sqrt{3}$ m
d) $25\sqrt{6}$ m
e) $50\sqrt{6}$ m



◯ **44. (UFSM)** Um dos professores da escola utilizou um software para construir gráficos de funções. Sobre a função representada no gráfico é correto afirmar:



a) O período da função é 2π.

b) O domínio é o intervalo [-3, 3]

c) A imagem é o conjunto R.

d) A função é par.

e) A função é $y = 3$ sen $x/2$

◯ **45. (UFSM)** Uma gráfico que confeccionou material de campanha determina o custo unitário de um de seus produtos, em reais, de acordo com a lei $C(t) = 200 + 120\text{sen}\dfrac{\pi \cdot t}{2}$ com t medido em horas de trabalho. Assim, os custos máximo e mínimo desse produto são

a) 320 e 200

b) 200 e 120

c) 200 e 80

d) 320 e 80

e) 120 e 80

◯ **46. (UFSM)** Sabendo-se que o conjunto imagem da função $f(x) = a + b$ senx, com $b > 0$, é o intervalo fechado [3,5], é correto afirmar que os valores de a e b são, respectivamente

a) 4 e 1

b) 3 e 5

c) 5 e 3

d) 1 e 4

e) 7 e 6

◯ **47. (UFSM)** Em determinada cidade, a concentração diária, em gramas, de partículas de fósforo na atmosfera é medida pela função $C(t) = 3 + 2\text{sen}(\pi t/6)$, em que t é a quantidade de horas para fazer essa medição. O tempo mínimo necessário para fazer uma medição que registrou 4 gramas de fósforo é de

a) 1/2 hora.

b) 1 hora.

c) 2 horas.

d) 3 horas.

e) 4 horas.

◯ **48. (UFSM).** A função

$$N(t) = 308 - 280 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$$

representa o número de casos de uma doença em certa região, em função do tempo t, em meses. Então, é correto afirmar:

a) Inicialmente, o número de pessoas doentes é 308.

b) O número máximo de casos ocorre, quando $t = 3$.

c) O período da função N é 6.

d) O menor valor de N é 28.

e) O número de casos varia de 308 a 588.

◯ **49. (UFSM)** Entre os pontos A e C, localizados na margem de um lago, será estendido um cabo com bóias sinalizadoras que demarcará a parte permitida para o passeio de pedalinhos. Para a compra do material a ser utilizado, é necessário determinar a distância entre esses pontos. A medição direta da distância entre A e C não pode ser realizada, pois fica sobre a superfície do lago. Assim, marcou-se um ponto B intermediário, de modo que as distâncias entre A e B e entre B e C pudessem ser feitas sobre terra firme. Sabendo que a distância entre A e B é 100 metros, que a distância entre B e C é 60 metros e que o ângulo com vértice em B determinado por A, B e C é 120 graus, a distância entre A e C, em metros, é:

a) 120.

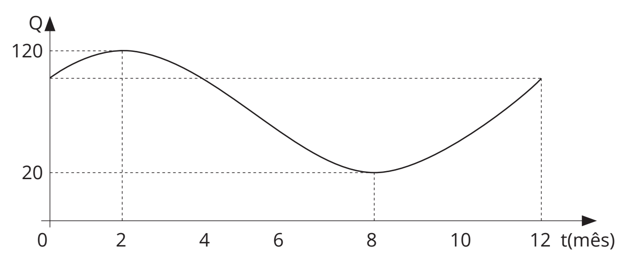
b) 140.

c) 150.

d) 155.

e) 160.

◯ **50. (UFSM)**



O gráfico mostra a quantidade de animais que uma certa área de pastagem pode sustentar ao longo de 12 meses. Propõe-se a função $Q(t) = a \text{ sen } (b + ct) + d$ para descrever essa situação. De acordo com os dados, Q (0) é igual a:

a) 100.

b) 97.

c) 95.

d) 92.

e) 90.

◯ **51. (UFSM)** Em muitas cidades, os poluentes emitidos em excesso pelos veículos causam graves problemas a toda a população. Durante o inverno, a poluição demora mais para se dissipar na atmosfera, favorecendo o surgimento de doenças respiratórias.

Suponha que a função

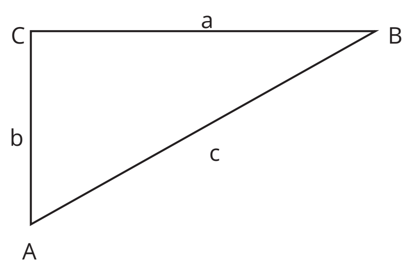
$$N(x) = 180 - 54 \cos\left(\frac{\pi}{6}(x - 1)\right)$$

represente o número de pessoas com doenças respiratórias registrado num Centro de Sáude, com x = 1 correspondendo ao mês de janeiro, x = 2, o mês de fevereiro e assim por diante.

A soma do número de pessoas com doenças respiratórias registrado nos meses de janeiro, março, maio e julho é igual a:

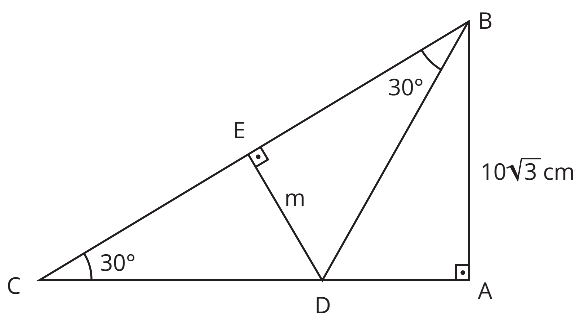
a) 693.
b) 720.
c) 747.
d) 774.
e) 936.

◯ **52. (UFRGS)** Na figura, A = 60º e B = 30º. A razão a/b vale:



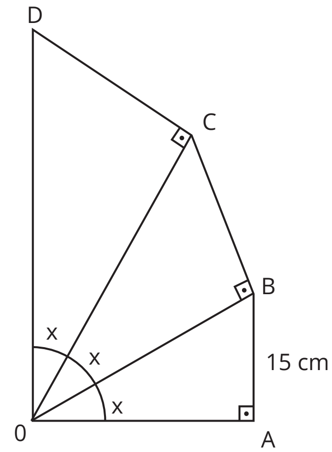
a) 2
b) 1/2
c) $3/\sqrt{3}$
d) $\sqrt{3}/3$
e) $\sqrt{3}$

◯ **53. (UFSM)** O valor **m** indicado na figura é igual a:



a) $5\sqrt{3}$ cm
b) 6 cm
c) 8 cm
d) 10 cm
e) $10\sqrt{3}$ cm

◯ **54. (UFSM)** Na figura, os ângulos A0D, A, B e C são retos. A medida do segmento de reta CD, em cm, vale:

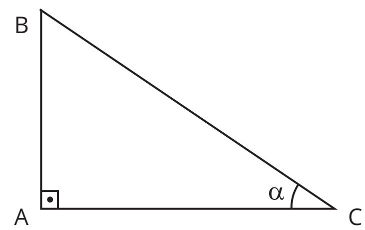


a) $20\sqrt{3}$
b) $60\sqrt{3}$
c) 20
d) 30
e) 40

◯ **55. (UFSM)** Uma torre vertical, construída sobre um plano horizontal, tem 25 m de altura. Um cabo de aço, esticado, liga o topo da torre até o plano, fazendo com ele um ângulo de 60º. O comprimento do cabo de aço é:

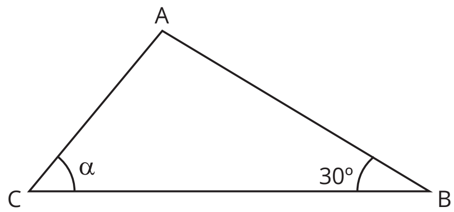
a) 50 m
b) $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ m
c) $\frac{25\sqrt{3}}{3}$ m
d) $\frac{50\sqrt{3}}{2}$ m
e) $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ m

◯ **56. (UFRGS)** No triângulo, BC = 10 e cos α = 0,8. O valor de AB é:



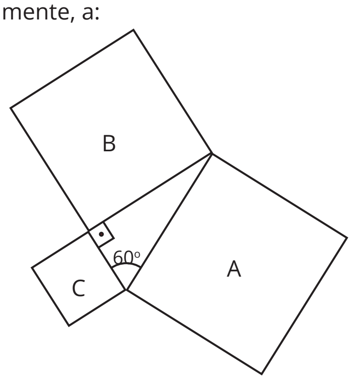
a) 8
b) 6
c) 5
d) 4
e) 2

◯ **57. (UFRGS)** Na figura, sen α = 0,8 e AB = 2. O valor de AC é:



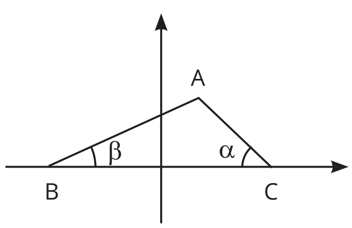
a) 1,15
b) 1,25
c) 1,50
d) 1,75
e) 1,80

◯ **58. (UFSM)** A figura representa três quadrados cujas áreas são A, B e C. As razões entre as áreas B e A, C e A e B e C equivalem, respectivamente, a:



a) 1/2, 1/2, 1
b) 3/4, 1/4, 3
c) $\sqrt{3}/2$, 1/2, $\sqrt{3}$
d) 1/4, 3/4, 1/3
e) 1/2, $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{3}/3$

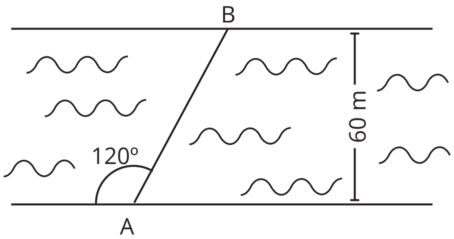
◯ **59. (UFSM)** Considere o triângulo ABC, representado no sistema de coordenadas retangulares abaixo. O vértice A pertence à reta de equação x = 1/3, e sua ordenada é positiva. Os outros dois vértices são os pontos: B(-1, 0) e C(1, 0). Denotemos por α e β, respectivamente, os ângulos BCA e ABC.



Então, $\dfrac{\text{tg }\alpha}{\text{tg }\beta}$ é igual a:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

◯ **60. (UFRGS)** Um barco parte de A para atravessar um rio. A direção de seu deslocamento forma um ângulo de 120º com a margem.



Sendo a largura do rio 60 m, a distância, em metros, percorrida pelo barco foi de:

a) $40\sqrt{2}$
b) $40\sqrt{3}$
c) $45\sqrt{3}$
d) $50\sqrt{3}$
e) $60\sqrt{2}$

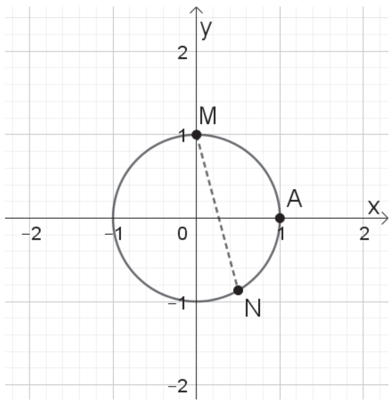
◯ **61. (UFSM)** Um estudante de engenharia vê um prédio do campus da UFSM construído em um terreno plano, sob um ângulo de 30º. Aproximando-se do prédio mais 40 m, passa a vê-lo sob um ângulo de 60º. Considerando que a base do prédio está no mesmo nível do olho do estudante, então a altura **h** do prédio é igual a:

a) $30\sqrt{3}$ m
b) $20\sqrt{3}$ m
c) 30 m
d) $10\sqrt{3}$ m
e) 28 m

◯ **62. (UFRGS)** Considere a função real de variável real f(x) = 3 - 5 sen(2x + 4). Os valores de máximo, mínimo e o período de f(x) são, respectivamente:

a) -2, 8, π
b) 8, -2, π
c) π, -2, 8
d) π, 8, -2
e) 8, π, -2

◯ **63. (UFRGS)** Na circunferência de raio 1, representada na figura a seguir, os pontos M e N são tais que o arco de extremidades A e M mede $\frac{\pi}{2}$ rad e o arco de extremidades A e N mede - $\frac{\pi}{3}$ rad.



A distância entre os pontos M e N é:

a) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

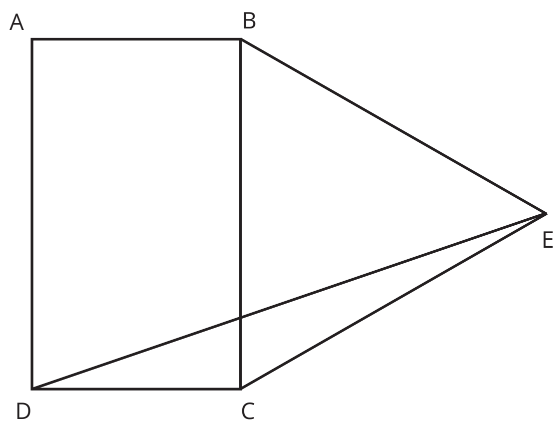
b) $2-\sqrt{3}$

c) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

d) 1

e) $2+\sqrt{3}$

◯ **64. (UFRGS)** Na figura abaixo, tem-se um retângulo ABCD, de lados AB = 3 e AD = 5, e um triângulo equilátero BEC, construído sobre o lado BC.



A medida de $\overline{DE}$ é:

a) $\sqrt{34+15\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{34-15\sqrt{3}}$

c) 7

d) $\sqrt{19}$

e) $\sqrt{34+15\sqrt{3}}$

◯ **65. (UFRGS)** O valor máximo da função trigonométrica $f(x) = \sqrt{2}\,\text{sen}(x) + \sqrt{2}\cos(x)$ é:

a) $\sqrt{2}$.

b) 2.

c) 3.

d) $\sqrt{5}$.

e) π.

Anotações:

HABILIDADES À PROVA 3

» *Introdução à Análise Combinatória*

◯ **1. (ENEM)** O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e do *slogan* "Juntos num só ritmo", com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

Disponível em: www.pt.fifa.com. Acesso em: 19 nov. 2013 (adaptado).

De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

a) 15
b) 30
c) 108
d) 360
e) 972

◯ **2. (ENEM)** Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que “L” e “D” representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.

A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

A opção que mais se adequa às condições da empresa é:

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

◯ **3. (ENEM)** Desde 1999 houve uma significativa mudança nas placas dos carros particulares em todo o Brasil. As placas, que antes eram formadas apenas por seis caracteres alfanuméricos, foram acrescidas de uma letra, passando a ser formadas por sete caracteres, sendo que os três primeiros caracteres devem ser letras (dentre as 26 letras do alfabeto), e os quatro últimos devem ser algarismos (de 0 a 9). Essa mudança possibilitou a criação de um cadastro nacional unificado de todos os veículos licenciados e ainda aumentou significativamente a quantidade de combinações possíveis de placas. Não são utilizadas placas em que todos os algarismos sejam iguais a zero.

Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 14 jan. 2012 (adaptado).

Nessas condições, a quantidade de placas que podem ser utilizadas é igual a:

a) $26^3 + 9^4$
b) $26^3 \times 9^4$
c) $26^3(10^4 - 1)$
d) $(26^3 + 10^4) - 1$
e) $(26^3 \times 10^4) - 1$

◯ **4. (ENEM)** Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta-corrente pela internet.

Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres.

Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo.

O coeficiente de melhora da alteração recomendada é:

a) $\frac{62^6}{10^6}$
b) $\frac{62!}{10!}$
c) $\frac{62!\ 4!}{10!\ 56!}$
d) $62! - 10!$
e) $62^6 - 10^6$

◯ **5. (ENEM)** Uma pessoa comprou um aparelho sem fio para transmitir músicas a partir do seu computador para o rádio de seu quarto. Esse aparelho possui quatro chaves seletoras, e cada uma pode estar na posição 0 ou 1. Cada escolha das posições dessas chaves corresponde a uma frequência diferente de transmissão.

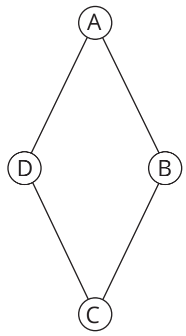
A quantidade de frequências diferentes que esse aparelho pode transmitir é determinada por:

a) 6.
b) 8.
c) 12.
d) 16.
e) 24.

◯ **6. (ENEM)** Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes.

Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes.

A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.



Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

a) 6
b) 12
c) 18
d) 24
e) 36

◯ **7. (ENEM)** O *designer* português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem ser associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.

Folha de São Paulo. Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 18 fev. 2012 (adaptado).

De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

a) 14
b) 18
c) 20
d) 21
e) 23

◯ **8. (ENEM)** O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existam 5 objetos e 6 personagens em uma casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido. Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor, e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há:

a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

◯ **9. (ENEM)** No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.

O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é:

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

◯ **10. (ENEM)** O código de barras, contido na maior parte dos produtos industrializados, consiste em um conjunto de várias barras que podem estar preenchidas com cor escura ou não. Quando um leitor óptico passa sobre essas barras, a leitura de uma barra clara é convertida no número 0, e a de uma barra escura, no número 1. Observe a seguir um exemplo simplificado de um código em um sistema de código com 20 barras.

Se o leitor óptico for passado da esquerda para a direita, irá ler: 01011010111010110001

Se o leitor óptico for passado da direita para a esquerda, irá ler: 10001101011101011010

No sistema de código de barras, para se organizar o processo de leitura óptica de cada código, deve-se levar em consideração que alguns códigos podem ter leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, como o código 00000000111100000000, no sistema descrito acima.

Em um sistema de códigos que utilize apenas cinco barras, a quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, desconsiderando-se todas as barras claras ou todas as escuras, é:

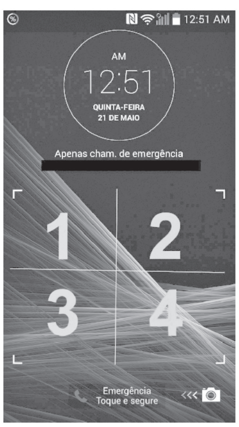
a) 14
b) 12
c) 8
d) 6
e) 4

◯ **11. (ENEM)** Um procedimento padrão para aumentar a capacidade do número de senhas de banco é acrescentar mais caracteres a essa senha. Essa prática, além de aumentar as possibilidades de senha, gera um aumento na segurança. Deseja-se colocar dois novos caracteres na senha de um banco, um no início e outro no final. Decidiu-se que esses novos caracteres devem ser vogais e que o sistema conseguirá diferenciar maiúsculas de minúsculas.

Com essa prática, o número de senhas possíveis ficará multiplicado por:

a) 100
b) 90
c) 80
d) 25
e) 20

◯ **12. (ENEM 2020)** Um modelo de telefone celular oferece a opção de desbloquear a tela usando um padrão de toques como senha.

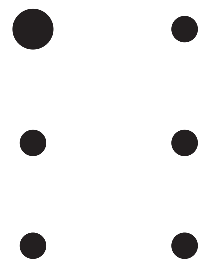


Os toques podem ser feitos livremente nas 4 regiões numeradas da tela, sendo que o usuário pode escolher entre 3, 4 ou 5 toques ao todo.

Qual expressão representa o número total de códigos existentes?

a) $4^5 - 4^4 - 4^3$
b) $4^5 + 4^4 + 4^3$
c) $4^5 \times 4^4 \times 4^3$
d) $(4!)^5$
e) 4^5

◯ **13. (ENEM)** A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caractere é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais.



Por exemplo, a letra A é representada por:

O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é:

a) 12
b) 31
c) 36
d) 63
e) 720

◯ **14. (ENEM)** Um prédio, com 9 andares e 8 apartamentos de 2 quartos por andar, está com todos os seus apartamentos à venda. Os apartamentos são identificados por números formados por dois algarismos, sendo que a dezena indica o andar onde se encontra o apartamento, e a unidade, um algarismo de 1 a 8, que diferencia os apartamentos de um mesmo andar. Quanto à incidência de sol nos quartos desses apartamentos, constatam-se as seguintes características, em função de seus números de identificação:

- naqueles que finalizam em 1 ou 2, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 3, 4, 5 ou 6, apenas um dos quartos recebe sol na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 7 ou 8, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da tarde.

Uma pessoa pretende comprar 2 desses apartamentos em um mesmo andar, mas quer que, em ambos, pelo menos um dos quartos receba sol na parte da manhã.

De quantas maneiras diferentes essa pessoa poderá escolher 2 desses apartamentos para compra nas condições desejadas?

a) $9 \times \dfrac{6!}{(6-2)!}$

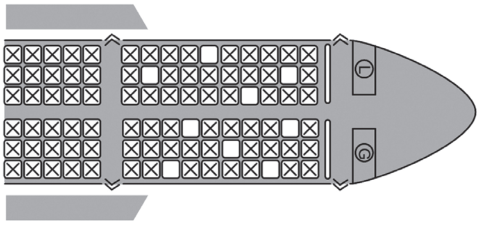
b) $9 \times \dfrac{6!}{(6-2)! \times 2!}$

c) $9 \times \dfrac{4!}{(4-2)! \times 2!}$

d) $9 \times \dfrac{2!}{(2-2)! \times 2!}$

e) $9 \times \left(\dfrac{8!}{(8-2)! \times 2!} - 1\right)$

◯ **15. (ENEM)** Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura disponibilizada pelo *site*, as poltronas ocupadas estão marcadas com X, e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por:

a) $\frac{9!}{2!}$

b) $\frac{9!}{7! \cdot 2!}$

c) 7!

d) $\frac{5!}{2!} \cdot 4!$

e) $\frac{5!}{4!} \cdot \frac{4!}{3!}$

◯ **16. (ENEM)** Uma montadora de automóveis divulgou que oferta a seus clientes mais de 1 000 configurações diferentes de carro, variando o modelo, a motorização, os opcionais e a cor do veículo. Atualmente, ela oferece 7 modelos de carros com 2 tipos de motores: 1.0 e 1.6. Já em relação aos opcionais, existem 3 escolhas possíveis: central multimídia, rodas de liga leve e bancos de couro, podendo o cliente optar por incluir um, dois, três ou nenhum dos opcionais disponíveis.

Para ser fiel à divulgação feita, a quantidade mínima de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes é

a) 8.

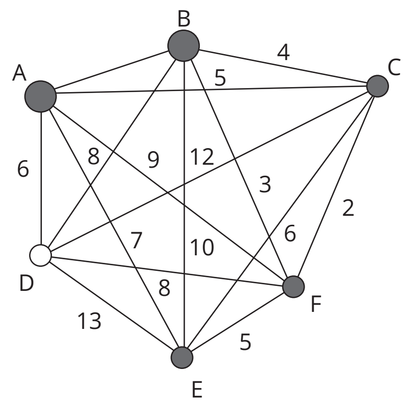
b) 9.

c) 11.

d) 18.

e) 24.

◯ **17. (ENEM)** João mora na cidade A e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto ABCDEFA informa que ele sairá da cidade A, visitando as cidades B, C, D, E e F nesta ordem, voltando para a cidade A. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades. A figura mostra o custo de deslocamento entre cada uma das cidades.



Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes.

Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos ABCDEFA e AFEDCBA têm o mesmo custo. Ele gasta 1min30s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado.

O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de:

a) 60min.

b) 90min.

c) 120min.

d) 180min.

e) 360min.

◯ **18. (ENEM)** A população brasileira sabe, pelo menos intuitivamente, que a probabilidade de acertar as seis dezenas da Mega-Sena não é zero, mas é quase.

Mesmo assim, milhões de pessoas são atraídas por essa loteria, especialmente quando o prêmio se acumula em valores altos. Até junho de 2009, cada aposta de seis dezenas, pertencentes ao conjunto {01, 02, 03, ..., 59, 60}, custava R$ 1,50.

Disponível em: www.caixa.gov.br. Acesso em: 7 jul. 2009.

Considere que uma pessoa decida apostar exatamente R$ 126,00 e que esteja mais interessada em acertar apenas cinco das seis dezenas da Mega-Sena, justamente pela dificuldade desta última. Nesse caso, é melhor que essa pessoa faça 84 apostas de seis dezenas diferentes, que não tenham cinco números em comum, do que uma única aposta com nove dezenas, porque a probabilidade de acertar a quina no segundo caso em relação ao primeiro é, aproximadamente:

a) $1\frac{1}{2}$ vez menor.

b) $2\frac{1}{2}$ vezes menor.

c) 4 vezes menor.

d) 9 vezes menor.

e) 14 vezes menor.

○ **19. (ENEM)** O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.

Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75.913 é:

a) 24
b) 31
c) 32
d) 88
e) 89

○ **20. (ENEM)** Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos, distribuídas conforme a tabela a seguir.

Grupos taxonômicos	Número de espécies
Artiodáctilos	4
Carnívoros	18
Cetáceos	2
Quirópteros	103
Lagomorfos	1
Marsupiais	16
Perissodáctilos	1
Primatas	20
Roedores	33
Sirênios	1
Edentados	10
Total	**209**

T & C Amazônia, ano 1, nº 3, dez./2003.

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três dessas espécies de mamíferos – uma do grupo Cetáceos, outra do grupo Primatas e a terceira do grupo Roedores.

O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a:

a) 1.320
b) 2.090
c) 5.845
d) 6.600
e) 7.245

○ **21. (ENEM)** Considere que um professor de Arqueologia tenha obtido recursos para visitar 5 museus, sendo 3 deles no Brasil e 2 fora do país. Ele decidiu restringir sua escolha aos museus nacionais e internacionais relacionados na tabela a seguir.

Museus nacionais	Museus internacionais
Masp - São Paulo	Louvre - Paris
MAM - São Paulo	Prado - Madri
Ipiranga - São Paulo	British Museum - Londres
Imperial - Petrópolis	Metropolitan - Nova York

De acordo com os recursos obtidos, de quantas maneiras diferentes esse professor pode escolher os 5 museus para visitar?

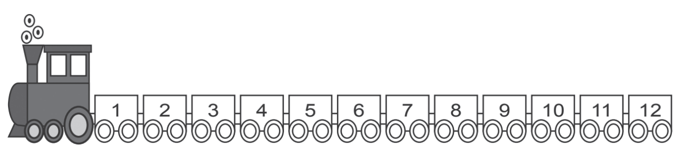
a) 6
b) 8
c) 20
d) 24
e) 36

○ **22. (ENEM)** Durante suas férias, oito amigos, dos quais dois são canhotos, decidem realizar um torneio de vôlei de praia. Eles precisam formar quatro duplas para a realização do torneio. Nenhuma dupla pode ser formada por dois jogadores canhotos.

De quantas maneiras diferentes podem ser formadas essas quatro duplas?

a) 69
b) 70
c) 90
d) 104
e) 105

○ **23. (ENEM)** Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 12 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 12. Dos 12 vagões, 4 são pintados na cor vermelha, 3 na cor azul, 3 na cor verde e 2 na cor amarela. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 12 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.



De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por:

a) $C_{12}^{4} \times C_{12}^{3} \times C_{12}^{3} \times C_{12}^{2}$
b) $C_{12}^{4} + C_{8}^{3} + C_{5}^{3} + C_{2}^{2}$
c) $C_{12}^{4} \times 2 \times C_{8}^{3} \times C_{5}^{2}$
d) $C_{12}^{4} + 2 \times C_{12}^{3} + C_{12}^{2}$
e) $C_{12}^{4} \times C_{8}^{3} \times C_{5}^{3} \times C_{2}^{2}$

◯ **24. (ENEM 2021)** Uma pessoa produzirá uma fantasia utilizando como materiais: 2 tipos de tecidos diferentes e 5 tipos distintos de pedras ornamentais. Essa pessoa tem à sua disposição 6 tecidos diferentes e 15 pedras ornamentias distintas.

A quantidade de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas é representada pela expressão

a) $\frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{15!}{10!5!}$

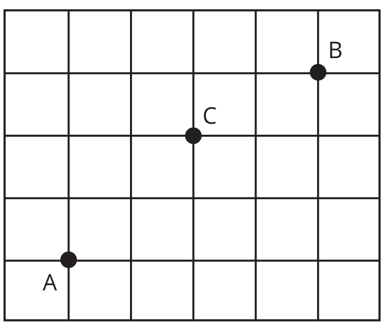
b) $\frac{6!}{4!2!} + \frac{15!}{10!5!}$

c) $\frac{6!}{2!} + \frac{15!}{5!}$

d) $\frac{6!}{2!} \cdot \frac{15!}{5!}$

e) $\frac{21!}{7!14!}$

◯ **25. (ENEM 2020)** Três amigos, André, Bernardo e Carlos, moram em um condomínio fechado de uma cidade. O quadriculado representa a localização das ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho nesse condomínio, em que nos pontos A, B e C estão localizadas as casas de André, Bernardo e Carlos, respectivamente.



André deseja deslocar-se da sua casa até a casa de Bernardo, sem passar pela casa de Carlos, seguindo ao longo das ruas do condomínio, fazendo sempre deslocamentos para a direita (→) ou para cima (↑), segundo o esquema da figura.

O número de diferentes caminhos que André poderá utilizar para realizar o deslocamento nas condições propostas é:

a) 4.
b) 14.
c) 17.
d) 35.
e) 48.

◯ **26. (ENEM 2020)** Nos livros *Harry Potter*, um anagrama do nome do personagem "TOM MARVOLO RIDDLE" gerou a frase "I AM LORD VOLDEMORT".

Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase "I AM POTTER", de tal forma que as vogais e as consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras.

Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por:

a) 9!
b) 4! 5!
c) 2 × 4! 5!
d) $\frac{9!}{2}$
e) $\frac{4!\,5!}{2}$

◯ **27. (ENEM 2020)** Eduardo deseja criar um e-mail utilizando um anagrama exclusivamente com as sete letras que compõem seu nome, antes do símbolo @ .

O e-mail terá a forma *******@site.com.br e será de tal modo que as três letras "edu" apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem.

Ele sabe que o e-mail eduardo@site.com.br já foi criado por outro usuário e que qualquer outro agrupamento das letras do seu nome fora um e-mail que ainda não foi cadastrado.

De quantas maneiras Eduardo pode criar um e-mail desejado?

a) 59
b) 60
c) 118
d) 119
e) 120

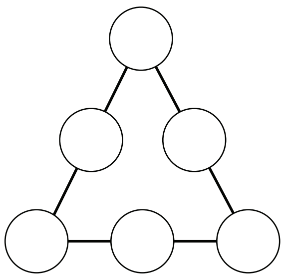
◯ **28. (ENEM 2020)** A prefeitura de uma cidade está renovando os canteiros de flores de suas praças. Entre as possíveis variedades que poderiam ser plantadas, foram escolhidas cinco: amor-perfeito, cravina, petúnia, margarida e lírio. Em cada um dos canteiros, todos com composições diferentes, serão utilizadas somente três variedades distintas, não importando como elas serão dispostas.

Um funcionário deve determinar os trios de variedades de flores que irão compor cada canteiro.

De acordo com o disposto, a quantidade de trios possíveis é dada por:

a) 5
b) $5 \cdot 3$
c) $\frac{5!}{(5-3)!}$
d) $\frac{5!}{(5-3)!2!}$
e) $\frac{5!}{(5-3)!3!}$

◯ **29. (ENEM 2023)** O triângulo da figura é denominado triângulo mágico. Nos círculos, escrevem-se os números de 1 a 6, sem repetição, com um número em cada círculo. O objetivo é distribuir os números de forma que as somas dos números em cada lado do triângulo sejam iguais.



Considere que os números colocados nos vértices do triângulo estejam em progressão aritmética de razão igual a 2.

Nas condições propostas, quais as possíveis soluções para as somas dos números que formam os lados do triângulo?

a) Há somente uma solução possível, e as somas em cada lado do triângulo são iguais a 7.

b) Há somente uma solução possível, e as somas em cada lado do triângulo são iguais a 9.

c) Há somente duas soluções possíveis, uma em que as somas em cada lado do triângulo são iguais a 7 e outra em que as somas são iguais a 9.

d) Há somente duas soluções possíveis, uma em que as somas em cada lado do triângulo são iguais a 9 e outra em que as somas são iguais a 12.

e) Há somente duas soluções possíveis, uma em que as somas em cada lado do triângulo são iguais a 10 e outra em que as somas são iguais a 11.

◯ **30. (ENEM 2023)** Ao realizar o cadastro em um aplicativo de investimentos, foi solicitado ao usuário que criasse uma senha, sendo permitido o uso somente dos seguintes caracteres:

- algarismos de 0 a 9;
- 26 letras minúsculas do alfabeto;
- 26 letras maiúsculas do alfabeto;
- 6 caracteres especiais !, @, #, $, , &.

Três tipos de estruturas para senha foram apresentadas ao usuário:

• tipo I: formada por quaisquer quatro caracteres distintos, escolhidos dentre os permitidos;

• tipo II: formada por cinco caracteres distintos, iniciando por três letras, seguidas por um algarismo e, ao final, um caractere especial;

• tipo III: formada por seis caracteres distintos, iniciando por duas letras, seguidas por dois algarismos e, ao final, dois caracteres especiais.

Considere p_1, p_2 e p_3 as probabilidades de se descobrirem ao acaso, na primeira tentativa, as senhas dos tipos I, II e III, respectivamente.

Nessas condições, o tipo de senha que apresenta a menor probabilidade de ser descoberta ao acaso, na primeira tentativa, é o:

a) tipo I, pois $p_1 < p_2 < p_3$.

b) tipo I, pois tem menor quantidade de caracteres.

c) tipo II, pois tem maior quantidade de letras.

d) tipo III, pois $p_3 < p_2 < p_1$.

e) tipo III, pois tem maior quantidade de caracteres.

◯ **31. (UFSM)** Uma família composta de 7 pessoas deseja, por razões econômicas, enviar apenas 3 representantes a uma cerimônia de casamento. Se o pai e a mãe devem permanecer juntos, o número de maneiras diferentes de escolha dessas 3 pessoas é

a) 5

b) 10

c) 15

d) 20

e) 25

◯ **32. (UFSM)** O sistema de segurança de um laboratório utiliza um teclado numérico, conforme está ilustrado na figura.

O número de senhas com 4 dígitos, as quais não iniciam com o dígito zero é dado por

a) 648

b) 1.080

c) 5.040

d) 6.480

e) 9.000

◯ **33. (UFSM)** No código Morse, as "letras" são ponto e traço. Pode-se afirmar que o número de "palavras" de até 5 "letras" que podem ser formadas, é igual a

a) 10

b) 20

c) 32

d) 41

e) 62

◯ **34. (UFSM)** Numa Câmara de Vereadores, trabalham 6 vereadores do partido A, 5 vereadores do partido B e 4 vereadores do partido C. O número de comissões de 7 vereadores que podem ser formadas, devendo cada comissão ser constituída de 3 vereadores do partido A, 2 vereadores do partido B e 2 vereadores do partido C, é igual a:

a) 7
b) 36
c) 152
d) 1200
e) 28800

◯ **35. (UFSM)** São dados sete pontos distintos, A, B, C, D, E, F e G, sobre uma circunferência. Unindo esses pontos dois a dois, são determinadas __________ retas. O número de triângulos determinados por esses pontos é __________. Desses triângulos, exatamente __________ têm vértice no ponto A. A alternativa que preenche corretamente as lacunas é:

a) 21, 70, 15
b) 21, 35, 15
c) 42, 35, 15
d) 42, 70, 30
e) 21, 70, 30

◯ **36. (UFSM)** A quantidade de números naturais de cinco algarismos distintos que se pode formar com os algarismos 2, 3, 4, 5 e 6, de modo que os algarismos pares permaneçam juntos, é:

a) 12
b) 24
c) 30
d) 36
e) 40

◯ **37. (UFSM)** De quantas maneiras distintas podem-se alinhar cinco estacas azuis idênticas, uma vermelha e uma branca?

a) 12
b) 30
c) 42
d) 240
e) 5040

◯ **38. (UFSM)** Analise as afirmativas a seguir.

I - O número de comissões de 3 pessoas que se pode formar num grupo de 5 pessoas é 60.

II - Com os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5, podem-se formar 125 números de 3 algarismos.

III - A quantidade de 7 bombons iguais pode ser repartida de 6 maneiras diferentes, em duas caixas idênticas, sem que nenhuma caixa fique vazia.

Está(ão) correta(s):

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas I e III.
d) apenas II e III.
e) I, II e III.

◯ **39. (UFSM)** Para ter acesso a uma sala reservada, cada usuário recebe um cartão de identificação com 4 listras coloridas, de modo que qualquer cartão deve diferir de todos os outros pela natureza das cores ou pela ordem das mesmas nas listras. Operando com 5 cores distintas e observando que listras vizinhas não tenham a mesma cor, quantos usuários podem ser identificados?

a) 10
b) 20
c) 120
d) 320
e) 625

◯ **40. (UFSM)** Rafael tem dinheiro para comprar dois picolés e um sorvete. De quantos modos pode fazer seu pedido numa sorveteria que oferece três sabores de picolé e quatro sabores de sorvete?

a) 6
b) 7
c) 24
d) 36
e) 48

◯ **41. (UFSM)** Na composição da chapa contendo o nome dos candidatos a prefeito e a vice-prefeito de uma determinada cidade, um partido apresenta 7 nomes, todos podendo ser escolhido para os referidos cargos. O número de possibilidades de composição da chapa é:

a) $7!$
b) $\frac{7!}{5!}$
c) $\frac{7!}{5!2!}$
d) $\frac{7!}{2!}$
e) $2!$

◯ **42. (UFSM)** Para efetuar suas compras, o usuário que necessita sacar dinheiro no caixa eletrônico deve realizar duas operações: digitar uma senha composta por 6 algarismos distintos e outra composta de 3 letras escolhidas num alfabeto de 26 letras. Se essa pessoa esqueceu a senha, mas lembra que 8, 6 e 4 fazem parte dos três primeiros algarismos e que as letras são todas vagais distintas, sendo E a primeira delas, o número máximo de tentativas necessárias para acessar sua conta será:

a) 210
b) 230
c) 2520
d) 3360
e) 15120

◯ **43. (UFSM)** No código Morse, as “letras” são ponto e traço. Pode –se afirmar que o número de palavras de até 5 “letras” que podem ser formadas, é igual a:

a) 10
b) 20
c) 32
d) 41
e) 62

◯ **44. (UFSM)** O setor de nutrição de determinada cantina sugere, para uma refeição rica em carboidratos, 4 tipos de macarrão, 3 tipos de molho e 5 tipos de queijo. O total de opções para quem vai servir um tipo de macarrão, um tipo de molho e três tipos de queijo é:

a) 2.5!
b) 5!
c) (5!)2
d) 5!/2
e) 2/5!

◯ **45. (UFSM)** Uma pequena fábrica produz 4 tipos diferentes de massas e 6 tipos diferentes de molhos. Uma possibilidade de venda que agrada aos consumidores é colocá-las numa cesta que contenha 2 embalagens de massa e 3 embalagens de molho. Quantas cestas diferentes podem ser montadas, de forma que contenham exatamente 2 embalagens de massa não necessariamente diferentes e 3 tipos diferentes de molhos?

a) 1.820.
b) 320.
c) 240.
d) 200.
e) 120.

◯ **46. (UFSM)** O mosaico, comum em obras de arte e calçadas, pode ser construído a partir da utilização de cores e formas desiguais. Um mosaico é constituído de 5 figuras distintas, sendo cada figura pintada de uma cor diferente. Utilizando-se 7 cores, quantos mosaicos diferentes poderão ser feitos?

a) 7.
b) 21.
c) 35.
d) 1.260.
e) 2.520.

◯ **47. (UFSM)** Na fase inicial dos jogos da Copa do Mundo 2010, na África do Sul, os 32 países participantes foram divididos em 8 grupos, e cada seleção jogou uma vez com todas as seleções de seu grupo. O número total de jogos, nessa fase, foi de:

a) 24.
b) 32.
c) 48.
d) 56.
e) 64.

◯ **48. (UFSM)** Na versão da série do *Glee do Safety Dance*, um grupo de atores dança no hall de um *shopping center*, enquanto os demais apenas observam. Suponha que, para a execução da cena, foi necessário escolher, dentre 6 atores e 8 atrizes, um grupo formado por 5 atores e 5 atrizes. Quantos grupos diferentes de dançarinos podem ser escolhidos dessa forma?

a) 336.
b) 168.
c) 70.
d) 48.
e) 25.

◯ **49. (UFSM)** A partir de um grupo de oito pessoas, quer-se formar uma comissão constituída de quatro integrantes. Nesse grupo, incluem-se Gustavo e Danilo, que, sabe-se, não se relacionam um com o outro. Portanto, para evitar problemas, decidiu-se que esses dois, juntos, não deveriam participar da comissão a ser formada. Nessas condições, de quantas maneiras distintas se pode formar essa comissão?

a) 70
b) 35
c) 45
d) 55
e) 60

◯ **50. (UFSM)** Em uma viagem de estudos realizada pelos alunos dos cursos de Matemática e Engenharia Mecânica da UFSM, observou-se que, dos 40 passageiros, 25 eram conhecidos entre si. Feitas as apresentações, os que não se conheciam apertaram-se as mãos, uns aos outros. O número de apertos de mão é:

a) 156
b) 200
c) 210
d) 300
e) 480

◯ **51. (UFSM)** Por ocasião da Feira de Ciências, 10 alunos da turma de Susanita foram incumbidos de monitorar as salas Meio Ambiente e Informática. A sala Meio Ambiente deve ter 6 monitores. Como um dos principais objetivos é desenvolver a capacidade de o aluno pensar, refletir e expressar seus conhecimentos perante os visitantes, todos deverão passar pelas duas salas. Assim, o número de maneiras diferentes que esses alunos podem ser distribuídos nas duas salas, sem que nenhum seja excluído é:

a) 105
b) 210
c) 420
d) 5.040
e)151.020

◯ **52. (UFRGS 2023)** Uma biblioteca está elaborando etiquetas de identificação para os livros do acervo de tal forma que, em cada etiqueta, são usadas quatro letras distintas, de um alfabeto de 26 letras, e quatro algarismos também distintos, de 0 a 9.

A figura abaixo mostra um exemplo de modelo da etiqueta produzida.

E M A T **9 5 0 1**

Assinale a alternativa que apresenta o número total de etiquetas distintas produzidas pela biblioteca.

a) $26 + 10$
b) $26 \cdot 10$
c) $A_{26,4} \cdot A_{10,4}$
d) $A_{26,4} + A_{10,4}$
e) $10A_{26,4} + 26A_{10,4}$

◯ **53. (UFRGS 2024)** Um time de futebol de salão dispõe de 20 jogadoras de futebol, entre as quais apenas Antônia, Maria e Eduarda são goleiras. o número de times possíveis, com cinco jogadoras, em que apenas a goleira joga em uma posição fixa, é:

a) $C_{17,4}$
b) $C_{20,4}$
c) $C_{20,5}$
d) $C_{3,1} + C_{17,4}$
e) $C_{3,1} \cdot C_{17,4}$

◯ **54. (UFRGS)** Os números pares de 4 algarismos distintos formados pelos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 são em números de:

a) 120
b) 48
c) 30
d) 4
e) 7

◯ **55. (UFRGS)** Um professor organizou uma lista com 4 questões de Geometria e 6 de Álgebra, da qual indicou um conjunto diferente de 7 questões para cada um de seus alunos resolver. O número de alunos que recebeu todas as questões de Geometria para resolver é, no máximo, de:

a) 15
b) 20
c) 35
d) 42
e) 120

◯ **56. (UFRGS)** Com os algarismos ímpares pode-se formar “n” números maiores de 200 e que tenham apenas 3 algarismos distintos. O valor de **n** é:

a) 10
b) 48
c) 60
d) 72
e) 96

◯ **57. (UFRGS)** Uma caixa contém 32 esferas numeradas de 1 a 32. O número de maneiras distintas de retirar 3 esferas da caixa, ordenadas como primeira, segunda e terceira, em que a esfera com o número 8 seja pelo menos a terceira a ser retirada, é:

a) 27.

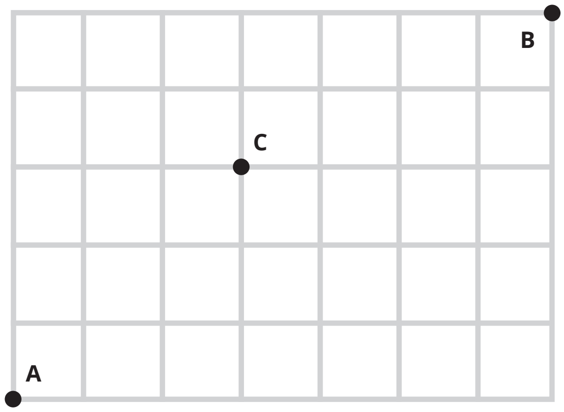
b) 96.

c) 2.000.

d) 2.018.

e) 2.790.

◯ **58. (UFRGS)** Um aplicativo de transporte disponibiliza em sua plataforma a visualização de um mapa com ruas horizontais e verticais que permitem realizar deslocamentos partindo do ponto A e chegando ao ponto B, conforme representado na figura abaixo.



O número de menores caminhos possíveis que partem de A e chegam a B, passando por C, é:

a) 28.

b) 35.

c) 100.

d) 300.

e) 792.

Anotações:

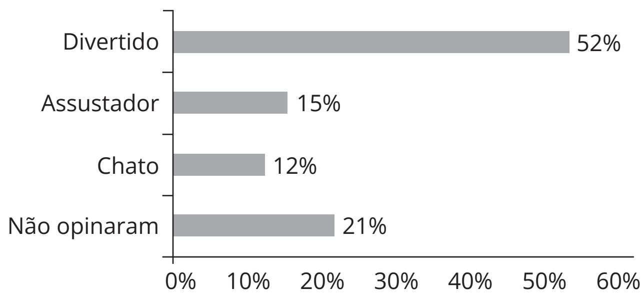
HABILIDADES À PROVA 4

» *Probabilidade*

◯ **1. (ENEM)** Em um *blog* de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados “Contos de Halloween”. Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em “Divertido”, “Assustador” ou “Chato”. Ao final de uma semana, o *blog* registrou que 500 visitantes distintos acessaram essa postagem.

O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.

Contos de Halloween
Opinião dos visitantes



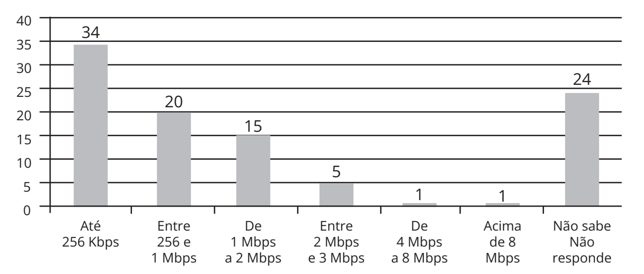
O administrador do *blog* irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem “Contos de Halloween”.

Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto “Contos de Halloween” é “Chato” é mais aproximada por:

a) 0,09
b) 0,12
c) 0,14
d) 0,15
e) 0,18

◯ **2. (ENEM)** O gráfico mostra a velocidade de conexão à internet utilizada em domicílios no Brasil. Esses dados são resultado da mais recente pesquisa, de 2009, realizada pelo Comitê Gestor da Internet (CGI).

% domicílios segundo a velocidade de conexão à internet



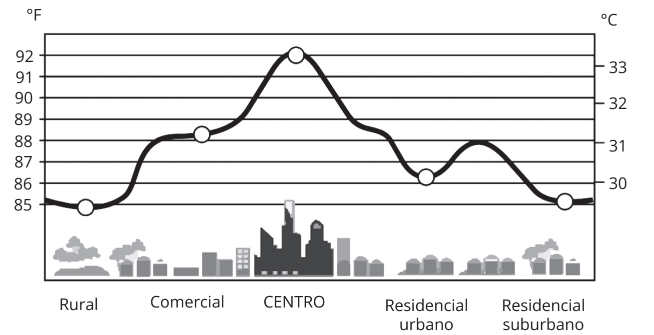
Disponível em: agencia.ipea.gov.br. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se, aleatoriamente, um domicílio pesquisado, qual a chance de haver banda larga de conexão de pelo menos 1 Mbps nesse domicílio?

a) 0,45
b) 0,42
c) 0,30
d) 0,22
e) 0,15

◯ **3. (ENEM)** Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial urbano ou Residencial suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das “ilhas de calor” da região, que deveriam ser inferiores a 31°C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:

Perfil da ilha de calor urbana



Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é:

a) 1/5
b) 1/4
c) 2/5
d) 3/5
e) 3/4

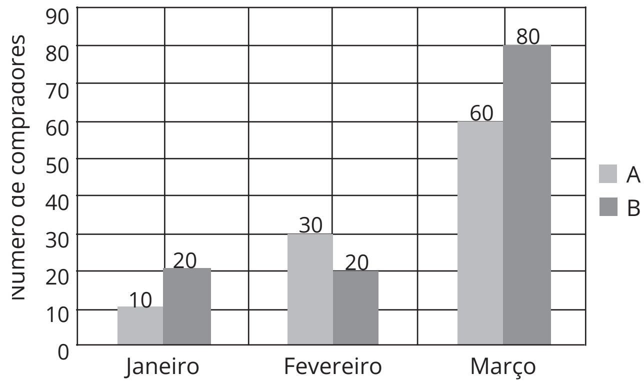
◯ **4. (ENEM)** O diretor de um colégio leu em uma revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

Tamanho dos calçados	Número de funcionárias
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é:

a) 1/3
b) 1/5
c) 2/5
d) 5/7
e) 5/14

◯ **5. (ENEM)** Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B.

Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

a) $\frac{1}{20}$

b) $\frac{3}{242}$

c) $\frac{5}{22}$

d) $\frac{6}{25}$

e) $\frac{7}{15}$

◯ **6. (ENEM)** Em uma escola com 1.200 alunos, foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento deles em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol.

Nessa pesquisa, constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas.

Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{5}{8}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{5}{6}$

e) $\frac{5}{14}$

◯ **7. (ENEM)** Uma fábrica de parafusos possui duas máquinas, I e II, para a produção de certo tipo de parafuso.

Em setembro, a máquina I produziu $\frac{54}{100}$ do total de parafusos produzidos pela fábrica. Dos parafusos produzidos por essa máquina, $\frac{25}{1.000}$ eram defeituosos. Por sua vez, $\frac{38}{1.000}$ dos parafusos produzidos no mesmo mês pela máquina II eram defeituosos.

O desempenho conjunto das duas máquinas é classificado conforme o quadro, em que P indica a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.

$0 \leq P < \frac{2}{100}$	Excelente
$\frac{2}{100} \leq P < \frac{4}{100}$	Bom
$\frac{4}{100} \leq P < \frac{6}{100}$	Regular
$\frac{6}{100} \leq P < \frac{8}{100}$	Ruim
$\frac{8}{100} \leq P \leq 1$	Péssimo

O desempenho conjunto dessas máquinas, em setembro, pode ser classificado como:

a) excelente.

b) bom.

c) regular.

d) ruim.

e) péssimo.

◯ **8. (ENEM)** José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4, e Antônio acredita que sua soma será igual a 8.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é:

a) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.

b) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.

c) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.

d) José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

e) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

◯ **9. (ENEM)** Uma locadora possui disponíveis 120 veículos da categoria que um cliente pretende locar. Desses, 20% são da cor branca, 40% são da cor cinza, 16 veículos são da cor vermelha, e o restante, de outras cores. O cliente não gosta da cor vermelha e ficaria contente com qualquer outra cor, mas o sistema de controle disponibiliza os veículos sem levar em conta a escolha da cor pelo cliente.

Disponibilizando aleatoriamente, qual é a probabilidade de o cliente ficar contente com a cor do veículo?

a) $\frac{16}{120}$

b) $\frac{32}{120}$

c) $\frac{72}{120}$

d) $\frac{101}{120}$

e) $\frac{104}{120}$

◯ **10. (ENEM)** Em um jogo disputado em uma mesa de sinuca, há 16 bolas: 1 branca e 15 coloridas, as quais, de acordo com a coloração, valem de 1 a 15 pontos (um valor para cada bola colorida).

O jogador acerta o taco na bola branca de forma que esta acerte as outras, com o objetivo de acertar duas das quinze bolas em quaisquer caçapas. Os valores dessas duas bolas são somados e devem resultar em um valor escolhido pelo jogador antes do início da jogada.

Arthur, Bernardo e Caio escolhem os números 12, 17 e 22 como sendo resultados de suas respectivas somas. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de ganhar o jogo é:

a) Arthur, pois a soma que escolheu é a menor.

b) Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 4 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.

c) Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.

d) Caio, pois há 10 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 8 possibilidades para a escolha de Bernardo.

e) Caio, pois a soma que escolheu é a maior.

◯ **11. (ENEM)** Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emilio Ribas, de São Paulo, a imunização "deve mudar", no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

Datas da vacinação	**Público-alvo**	**Quantidade de pessoas vacinadas**
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Disponível em: http://img.terra.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se, aleatoriamente, uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é:

a) 8%

b) 9%

c) 11%

d) 12%

e) 22%

◯ **12. (ENEM)** Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso.

Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

a) $\frac{1}{100}$

b) $\frac{19}{100}$

c) $\frac{20}{100}$

d) $\frac{21}{100}$

e) $\frac{8}{100}$

13. **(ENEM)** Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em uma sala, serem chamados para uma entrevista. Porém, em vez de chamá-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos.

A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é:

a) 23,7%
b) 30,0%
c) 44,1%
d) 65,7%
e) 90,0%

14. **(ENEM)** Para analisar o desempenho de um método diagnóstico, realizam-se estudos em populações contendo pacientes sadios e doentes. Quatro situações distintas podem acontecer nesse contexto de teste:

1. Paciente TEM a doença, e o resultado do teste é POSITIVO.
2. Paciente TEM a doença, e o resultado do teste é NEGATIVO.
3. Paciente NÃO TEM a doença, e o resultado do teste é POSITIVO.
4. Paciente NÃO TEM a doença, e o resultado do teste é NEGATIVO.

Um índice de desempenho para avaliação de um teste diagnóstico é a sensibilidade, definida como a probabilidade de o resultado do teste ser POSITIVO se o paciente estiver com a doença.

O quadro refere-se a um teste diagnóstico para a doença A, aplicado em uma amostra composta por duzentos indivíduos.

Resultado do teste	Doença A	
	Presente	Ausente
Positivo	95	15
Negativo	5	85

BENSEÑOR, I. M.; LOTUFO, P. A. Epidemiologia: abordagem prática. São Paulo: Sarvier, 2011 (adaptado).

Conforme o quadro do teste proposto, a sensibilidade dele é de:

a) 47,5%
b) 85,0%
c) 86,3%
d) 94,4%
e) 95,0%

15. **(ENEM)** O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser verdadeiro ou falso e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é 0,20.

A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é:

a) 0,02048
b) 0,08192
c) 0,24000
d) 0,40960
e) 0,49152

16. **(ENEM)** O controle de qualidade de uma empresa fabricante de telefones celulares aponta que a probabilidade de um aparelho de determinado modelo apresentar defeito de fabricação é de 0,2%. Se uma loja acaba de vender 4 aparelhos desse modelo para um cliente, qual é a probabilidade de esse cliente sair da loja com exatamente dois aparelhos defeituosos?

a) $2 \times (0{,}2\%)^4$
b) $4 \times (0{,}2\%)^2$
c) $6 \times (0{,}2\%)^2 \times (99{,}8\%)^2$
d) $4 \times (0{,}2\%)$
e) $6 \times (0{,}2\%) \times (99{,}8\%)$

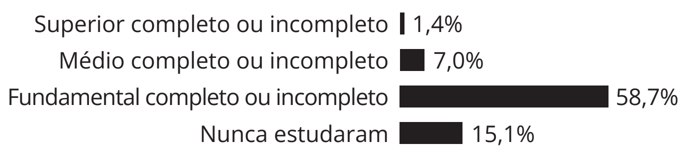
17. **(ENEM)**

A vida na rua como ela é

O Ministério do Desenvolvimento Social e Combate à Fome (MDS) realizou, em parceria com a ONU, uma pesquisa nacional sobre a população que vive na rua, tendo sido ouvidas 31.922 pessoas em 71 cidades brasileiras. Nesse levantamento, constatou-se que a maioria dessa população sabe ler e escrever (74%), que apenas 15,1 vivem de esmolas e que, entre os moradores de rua que ingressaram no ensino superior, 0,7 se diplomou. Outros dados da pesquisa são apresentados nos quadros a seguir.

Por que vive na rua?

Escolaridade

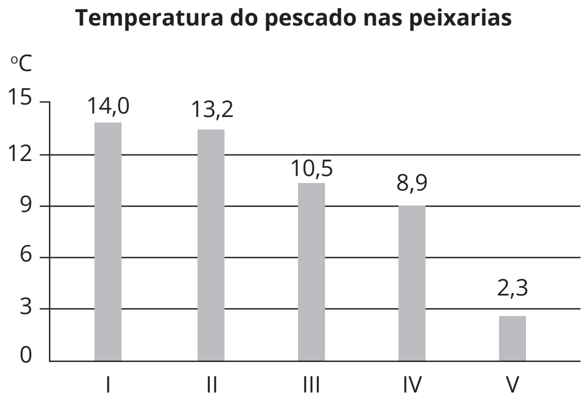


Istoé, 7/5/2008, p. 21 (com adaptações).

No universo pesquisado, considere que P seja o conjunto das pessoas que vivem na rua por motivos de alcoolismo/drogas e Q seja o conjunto daquelas cujo motivo para viverem na rua é a decepção amorosa. Escolhendo-se ao acaso uma pessoa no grupo pesquisado e supondo-se que seja igual a 40% a probabilidade de que essa pessoa faça parte do conjunto P ou do conjunto Q, então a probabilidade de que ela faça parte do conjunto interseção de P e Q é igual a:

a) 12%
b) 16%
c) 20%
d) 36%
e) 52%

◯ **18. (ENEM)**



Associação Brasileira de Defesa do Consumidor (com adaptações).

Uma das principais causas da degradação de peixes frescos é a contaminação por bactérias. O gráfico apresenta resultados de um estudo acerca da temperatura de peixes frescos vendidos em cinco peixarias. O ideal é que esses peixes sejam vendidos com temperaturas entre 2ºC e 4ºC. Selecionando-se aleatoriamente uma das cinco peixarias pesquisadas, a probabilidade de ela vender peixes frescos na condição ideal é igual a:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{1}{6}$

◯ **19. (ENEM)** A queima de cana aumenta a concentração de dióxido de carbono e de material particulado na atmosfera, causa alteração do clima e contribui para o aumento de doenças respiratórias. A tabela adiante apresenta números relativos a pacientes internados em um hospital no período da queima da cana.

Pacientes	**Problemas respiratórios causados pelas queimadas**	**Problemas respiratórios resultantes de outras causas**	**Outras doenças**	**Total**
Idosos	50	150	60	260
Crianças	150	210	90	450

Escolhendo-se aleatoriamente um paciente internado nesse hospital por problemas respiratórios causados pelas queimadas, a probabilidade de que ele seja uma criança é igual a:

a) 0,26, o que sugere a necessidade de implementação de medidas que reforcem a atenção ao idoso internado com problemas respiratórios.

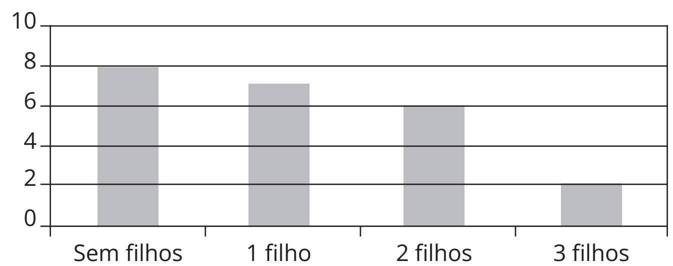
b) 0,50, o que comprova ser de grau médio a gravidade dos problemas respiratórios que atingem a população nas regiões das queimadas.

c) 0,63, o que mostra que nenhum aspecto relativo à saúde infantil pode ser negligenciado.

d) 0,67, o que indica a necessidade de campanhas de conscientização que objetivem a eliminação das queimadas.

e) 0,75, o que sugere a necessidade de que, em áreas atingidas pelos efeitos das queimadas, o atendimento hospitalar no setor de pediatria seja reforçado.

◯ **20. (ENEM)** As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico a seguir.



Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é:

a) $\frac{1}{3}$

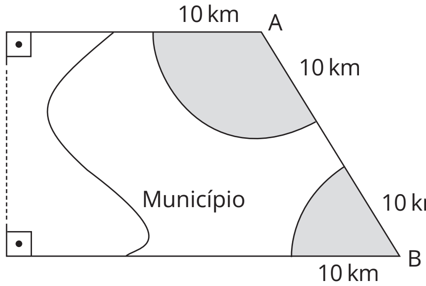
b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{7}{15}$

d) $\frac{7}{23}$

e) $\frac{7}{25}$

◯ **21. (ENEM)** Um município de 628 km^2 é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas A e B alcançam um raio de 10 km do município, conforme mostra a figura:



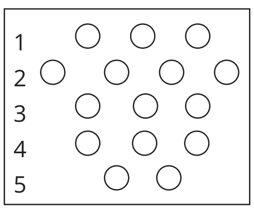
Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras.

Essa probabilidade é de, aproximadamente:

a) 20%
b) 25%
c) 30%
d) 35%
e) 40%

◯ **22. (ENEM)** Uma empresa de alimentos imprimiu em suas embalagens um cartão de apostas do seguinte tipo:

Frente do cartão



Verso do cartão

Como jogar:

– Inicie raspando apenas uma das alternativas da linha de início (linha 1).

– Se achar uma bola de futebol, vá para a linha 2 e raspe apenas uma das alternativas.

– Continue raspando dessa forma até o fim do jogo.

– Se encontrar um “x” em qualquer uma das linhas, o jogo está encerrado e você não terá direito ao prêmio.

– Se você encontrar uma bola de futebol em cada uma das linhas, terá direito ao prêmio.

Cada cartão de apostas possui 7 figuras de bolas de futebol e 8 sinais de “X” distribuídos entre os 15 espaços possíveis, de tal forma que a probabilidade de um cliente ganhar o prêmio nunca seja igual a zero. Em determinado cartão, existem duas bolas na linha 4 e duas bolas na linha 5. Com esse cartão, a probabilidade de o cliente ganhar o prêmio é:

a) $\frac{1}{27}$

b) $\frac{1}{36}$

c) $\frac{1}{54}$

d) $\frac{1}{72}$

e) $\frac{7}{108}$

◯ **23. (ENEM)** No próximo fim de semana, um grupo de alunos participará de uma aula de campo. Em dias chuvosos, aulas de campo não podem ser realizadas. A ideia é que essa aula seja no sábado, mas, se estiver chovendo no sábado, a aula será adiada para o domingo. Segundo a meteorologia, a probabilidade de chover no sábado é de 30%, e a de chover no domingo é de 25%.

A probabilidade de que a aula de campo ocorra no domingo é de:

a) 5,0%
b) 7,5%
c) 22,5%
d) 30,0%
e) 75,0%

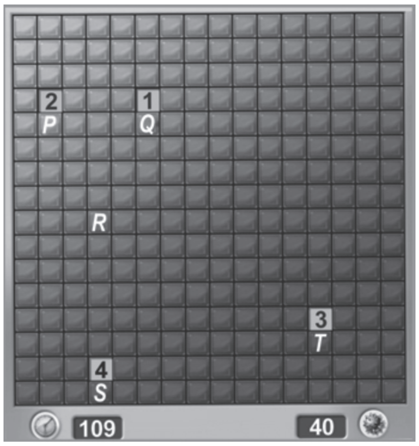
◯ **24. (ENEM)** O número de frutos de uma determinada espécie de planta se distribui de acordo com as probabilidades apresentadas no quadro.

Número de frutos	Probabilidade
0	0,65
1	0,15
2	0,13
3	0,03
4	0,03
5 ou mais	0,01

A probabilidade de que, em tal planta, existam, pelo menos, dois frutos é igual a:

a) 3%
b) 7%
c) 13%
d) 16%
e) 20%

◯ **25. (ENEM)** A figura ilustra uma partida de Campo Minado, o jogo presente em praticamente todo computador pessoal. Quatro quadrados em um tabuleiro 16x16 foram abertos, e os números em suas faces indicam quantos dos seus 8 vizinhos contêm minas (a serem evitadas). O número 40, no canto inferior direito, é o número total de minas no tabuleiro, cujas posições foram escolhidas ao acaso, de forma uniforme, antes de se abrir qualquer quadrado.



Em sua próxima jogada, o jogador deve escolher dentre os quadrados marcados com as letras P, Q, R, S e T um para abrir, sendo que deve escolher aquele com a menor probabilidade de conter uma mina.

O jogador deverá abrir o quadrado marcado com a letra:

a) P.
b) Q.
c) R.
d) S.
e) T.

◯ **26. (ENEM)** Numa avenida existem 10 semáforos. Por causa de uma pane no sistema, os semáforos ficaram sem controle durante uma hora e fixaram suas luzes unicamente em verde ou vermelho. Os semáforos funcionam de forma independente; a probabilidade de acusar a cor verde é de 2/3, e a de acusar a cor vermelha é de 1/3. Uma pessoa percorreu a pé toda essa avenida durante o período da pane, observando a cor da luz de cada um desses semáforos.

Qual a probabilidade de que essa pessoa tenha observado exatamente um sinal na cor verde?

a) $\dfrac{10 \times 2}{3^{10}}$

b) $\dfrac{10 \times 2^9}{3^{10}}$

c) $\dfrac{2^{10}}{3^{100}}$

d) $\dfrac{2^{90}}{3^{100}}$

e) $\dfrac{2}{3^{10}}$

◯ **27. (ENEM)** Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.

Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

a) 0,075
b) 0,150
c) 0,325
d) 0,600
e) 0,800

◯ **28. (ENEM)** Uma aluna estuda numa turma de 40 alunos. Em um dia, essa turma foi dividida em três salas, A, B e C, de acordo com a capacidade das salas. Na sala A ficaram 10 alunos, na B, outros 12 alunos, e, na C, 18 alunos. Será feito um sorteio no qual, primeiro, será sorteada uma sala e, posteriormente, será sorteado um aluno dessa sala.

Qual é a probabilidade de aquela aluna específica ser sorteada, sabendo que ela está na sala C?

a) $\dfrac{1}{3}$

b) $\dfrac{1}{18}$

c) $\dfrac{1}{40}$

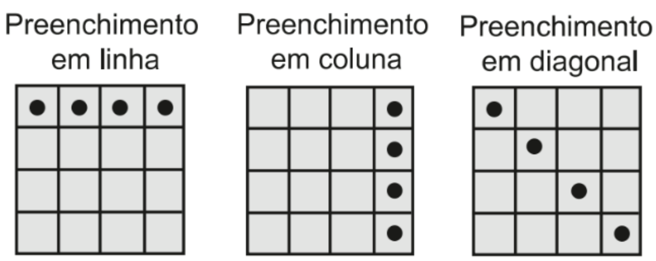
d) $\dfrac{1}{54}$

e) $\dfrac{7}{18}$

Anotações:

◯ **29. (ENEM)** Em um jogo de bingo, as cartelas contêm 16 quadrículas dispostas em linhas e colunas. Cada quadrícula tem impresso um número, dentre os inteiros de 1 a 50, sem repetição de número. Na primeira rodada, um número é sorteado, aleatoriamente, dentre os 50 possíveis. Em todas as rodadas, o número sorteado é descartado e não participa dos sorteios das rodadas seguintes. Caso o jogador tenha em sua cartela o número sorteado, ele o assinala na cartela. Ganha o jogador que primeiro conseguir preencher quatro quadrículas que formam uma linha, uma coluna ou uma diagonal, conforme os tipos de situações ilustradas na Figura 1.

Figura 1



O jogo inicia e, nas quatro primeiras rodadas, foram sorteados os seguintes números: 03, 27, 07 e 48. Ao final da quarta rodada, somente Pedro possuía uma cartela que continha esses quatro números sorteados, sendo que todos os demais jogadores conseguiram assinalar, no máximo, um desses números em suas cartelas. Observe na Figura 2 o cartão de Pedro após as quatro primeiras rodadas.

Figura 2

03	48	12	27
49	11	22	05
29	50	19	45
33	23	38	07

A probabilidade de Pedro ganhar o jogo em uma das duas próximas rodadas é

a) $\frac{1}{46} + \frac{1}{45}$

b) $\frac{1}{46} + \frac{2}{46 \times 45}$

c) $\frac{1}{46} + \frac{8}{46 \times 45}$

d) $\frac{1}{46} + \frac{43}{46 \times 45}$

e) $\frac{1}{46} + \frac{49}{46 \times 45}$

◯ **30. (ENEM)** A World Series é a decisão do campeonato norte-americano de beisebol. Os dois times que chegam a essa fase jogam, entre si, até sete partidas. O primeiro desses times que completar quatro vitórias é declarado campeão.

Considere que, em todas as partidas, a probabilidade de qualquer um dos dois times vencer é sempre $\frac{1}{2}$.

Qual é a probabilidade de o time campeão ser aquele que venceu a primeira partida da World Series?

a) $\frac{35}{64}$

b) $\frac{40}{64}$

c) $\frac{42}{64}$

d) $\frac{44}{64}$

e) $\frac{52}{64}$

◯ **31. (ENEM)** A Comissão Interna de Prevenção de Acidentes (CIPA) de uma empresa, observando os altos custos com os frequentes acidentes de trabalho ocorridos, fez, a pedido da diretoria, uma pesquisa do número de acidentes sofridos por funcionários. Essa pesquisa, realizada com uma amostra de 100 funcionários, norteará as ações da empresa na política de segurança no trabalho.

Os resultados obtidos estão no quadro.

Número de acidentes sofridos	Número de trabalhadores
0	50
1	17
2	15
3	10
4	6
5	2

A média do número de acidentes por funcionário na amostra que a CIPA apresentará à diretoria da empresa é:

a) 0,15.
b) 0,30.
c) 0,50.
d) 1,11.
e) 2,22.

◯ **32. (ENEM 2021)** O organizador de uma competição de lançamento de dardos pretende tornar o campeonato mais competitivo. Pelas regras atuais da competição, numa rodada, o jogador lança 3 dardos e pontua caso acerte pelo menos um deles no alvo. O organizador considera que, em média, os jogadores têm, em cada lançamento, $\frac{1}{2}$ de probabilidade de acertar um dardo no alvo.

A fim de tornar o jogo mais atrativo, planeja modificar as regras de modo que a probabilidade de um jogador pontuar em uma rodada seja igual ou superior a $\frac{9}{10}$. Para isso, decide aumentar a quantidade de dardos a serem lançados em cada rodada.

Com base nos valores considerados pelo organizador da competição, a quantidade mínima de dardos que devem ser disponibilizados em uma rodada para tornar o jogo mais atrativo é:

a) 2.

b) 4.

c) 6.

c) 9.

e) 10.

◯ **33. (ENEM 2020)** Um apostador deve escolher uma entre cinco moedas ao acaso e lançá-la sobre uma mesa, tentando acertar qual resultado (cara ou coroa) sairá na face superior da moeda.

Suponha que as cinco moedas que ele pode escolher sejam diferentes:

• duas delas têm "cara" nas duas faces;

• uma delas tem "coroa" nas duas faces;

• duas delas são normais (cara em uma face e coroa na outra).

Nesse jogo, qual é a probabilidade de o apostador obter uma face "cara" no lado superior da moeda lançada por ele?

a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{2}{5}$

c) $\frac{3}{5}$

d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{4}{5}$

◯ **34. (ENEM)** Uma empresa sorteia prêmios entre os funcionários como reconhecimento pelo tempo trabalhado. A tabela mostra a distribuição de frequência de 20 empregados dessa empresa que têm de 25 a 35 anos trabalhados. A empresa sorteou, entre esses empregados, uma viagem de uma semana, sendo dois deles escolhidos aleatoriamente.

Tempo de serviço	Número de empregados
25	4
27	1
29	2
30	2
32	3
34	5
35	3

Qual a probabilidade de que ambos os sorteados tenham 34 anos de trabalho?

a) $\frac{1}{20}$

b) $\frac{1}{19}$

c) $\frac{1}{16}$

d) $\frac{2}{20}$

e) $\frac{5}{20}$

◯ **35. (ENEM)** Uma senhora acaba de fazer uma ultrassonografia e descobre que está grávida de quadrigêmeos.

Qual é a probabilidade de nascerem dois meninos e duas meninas?

a) $\frac{1}{16}$

b) $\frac{3}{16}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{3}{8}$

e) $\frac{1}{2}$

36. (ENEM) O dono de um restaurante situado às margens de uma rodovia percebeu que, ao colocar uma placa de propaganda de seu restaurante ao longo da rodovia, as vendas aumentaram. Pesquisou junto aos seus clientes e concluiu que a probabilidade de um motorista perceber uma placa de anúncio é $\frac{1}{2}$. Com isso, após autorização do órgão competente, decidiu instalar novas placas com anúncios de seu restaurante ao longo dessa rodovia, de maneira que a probabilidade de um motorista perceber pelo menos uma das placas instaladas fosse superior a $\frac{99}{100}$.

A quantidade mínima de novas placas de propaganda a serem instaladas é:

a) 99.
b) 51.
c) 50.
d) 6.
e) 1.

37. (ENEM) Em um determinado ano, os computadores da receita federal de um país identificaram como inconsistentes 20% das declarações de imposto de renda que lhe foram encaminhadas. Uma declaração é classificada como inconsistente quando apresenta algum tipo de erro ou conflito nas informações prestadas. Essas declarações consideradas inconsistentes foram analisadas pelos auditores, que constataram que 25% delas eram fraudulentas. Constatou-se ainda que, dentre as declarações que não apresentaram inconsistências, 6,25% eram fraudulentas.

Qual é a probabilidade de, nesse ano, a declaração de um contribuinte ser considerada inconsistente, dado que ela era fraudulenta?

a) 0,0500
b) 0,1000
c) 0,1125
d) 0,3125
e) 0,5000

38. (ENEM) No alojamento de uma universidade, há alguns quartos com o padrão superior ao dos demais. Um desses quartos ficou disponível, e muitos estudantes se candidataram para morar no local. Para escolher quem ficará com o quarto, um sorteio será realizado. Para esse sorteio, cartões individuais com os nomes de todos os estudantes inscritos serão depositados em uma urna, sendo que, para cada estudante de primeiro ano, será depositado um único cartão com seu nome; para cada estudante de segundo ano, dois cartões com seu nome; e, para cada estudante de terceiro ano, três cartões com seu nome. Foram inscritos 200 estudantes de primeiro ano, 150 de segundo ano e 100 de terceiro ano. Todos os cartões têm a mesma probabilidade de serem sorteados.

Qual a probabilidade de o vencedor do sorteio ser um estudante de terceiro ano?

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{8}$
d) $\frac{2}{9}$
e) $\frac{3}{8}$

39. (ENEM) Em um colégio público, a admissão no primeiro ano se dá por sorteio. Neste ano há 55 candidatos, cujas inscrições são numeradas de 01 a 55. O sorteio de cada número de inscrição será realizado em etapas, utilizando-se duas urnas. Da primeira urna será sorteada uma bola, dentre bolas numeradas de 0 a 9, que representará o algarismo das unidades do número de inscrição a ser sorteado e, em seguida, da segunda urna, será sorteada uma bola para representar o algarismo das dezenas desse número. Depois do primeiro sorteio, e antes de se sortear o algarismo das dezenas, as bolas que estarão presentes na segunda urna serão apenas aquelas cujos números formam, com o algarismo já sorteado, um número de 01 a 55.

As probabilidades de os candidatos de inscrição número 50 e 02 serem sorteados são, respectivamente,

a) $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{60}$
b) $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{50}$
c) $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{10}$
d) $\frac{1}{55}$ e $\frac{1}{54}$
e) $\frac{1}{100}$ e $\frac{1}{100}$

40. (ENEM) Visando atrair mais clientes, o gerente de uma loja anunciou uma promoção em que cada cliente que realizar uma compra pode ganhar um voucher para ser usado em sua próxima compra. Para ganhar seu voucher, o cliente precisa retirar, ao acaso, uma bolinha de dentro de cada uma das duas urnas A e B disponibilizadas pelo gerente, nas quais há apenas bolinhas pretas e brancas. Atualmente, a probabilidade de se escolher, ao acaso, uma bolinha preta na urna A é igual a 20% e a probabilidade de se escolher uma bolinha preta na urna B é 25%. Ganha o voucher o cliente que retirar duas bolinhas pretas, uma de cada urna.

Com o passar dos dias, o gerente percebeu que, para a promoção ser viável aos negócios, era preciso alterar a probabilidade de acerto do cliente sem alterar a regra da promoção. Para isso, resolveu alterar a quantidade de bolinhas brancas na urna B de forma que a probabilidade de um cliente ganhar o voucher passasse a ser menor ou igual a 1%. Sabe-se que a urna B tem 4 bolinhas pretas e que, em ambas as urnas, todas as bolinhas têm a mesma probabilidade de serem retiradas.

Qual é o número mínimo de bolinhas brancas que o gerente deve adicionar à urna B?

a) 20
b) 60
c) 64
d) 68
e) 80

◯ **41. (UFSM)** A tabela a seguir mostra o número de internações hospitalares da população idosa (ou mais anos de idade), numa determinada região, de acordo com as causas da internação.

Causas	N° de internações
Doenças cardíacas	80
Doenças cerebrovasculares	49
Doenças pulmonares	43
Doenças renais	42
Diabetes melito	35
Fraturas de fêmur e ossos dos membros	26
Hipertensão arterial	24
Infecção de pele e tecido subcutâneo	11
Pneumonia bacteriana	77
Úlcera	13

Considere que hipertensão arterial, doenças renais, doenças cardíacas e osteoporose estão associadas ao consumo excessivo de sódio e que as fraturas de fêmur e ossos dos membros são causadas pela osteoporose. Assim, a probabilidade de um idoso internado, escolhido ao acaso, ter como diagnóstico principal uma doença associada ao consumo excessivo de sódio, de acordo com a tabela, é igual a:

a) 0,430.
b) 0,370.
c) 0,365.
d) 0,325.
e) 0,230.

◯ **42. (UFSM)** A tabela mostra o resultado de uma pesquisa sobre tipos sanguíneos em que foram testadas 600 pessoas.

Tipo de sangue	O^+	A^+	B^+	AB^+	O^-	A^-	B^-	AB^-
Número de pessoas	228	216	48	15	30	48	12	3

Qual é a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter sangue do tipo A^+ ou A^-?

a) $\frac{2}{25}$
b) $\frac{11}{50}$
c) $\frac{9}{25}$
d) $\frac{19}{50}$
e) $\frac{11}{25}$

◯ **43. (UFSM)** Em uma bandeja há dez pastéis dos quais três são de carne, três de queijo e quatro de camarão. Se Fabiana retirar, aleatoriamente e sem reposição, dois pastéis desta bandeja, a probabilidade de os dois pastéis retirados serem de camarão é:

a) 3/25
b) 4/25
c) 2/15
d) 2/
e) 4/5

◯ **44. (UFRGS 2023)** Na construção de um alvo para ser usado em uma competição olímpica, são usadas circunferências concêntricas, cujos raios medem 2, 4, 6, 8 e 10, respectivamente, tal como mostrado na figura abaixo.

Após a confecção do alvo, é realizado um teste, em que uma máquina dispara de maneira aleatória um dardo em direção ao alvo.

A probabilidade de o dardo lançado atingir, com a sua ponta, a parte sombreada do alvo é:

a) 20%.
b) 30%.
c) 40%.
d) 50%.
e) 60%.

◯ **45. (UFRGS 2024)** Considere uma moeda não viciada tendo uma face cara e uma face coroa. Ao lançar essa moeda cinco vezes, a probabilidade de se obter pelo menos três faces coroa é:

a) $\frac{1}{8}$.
b) $\frac{1}{6}$.
c) $\frac{1}{5}$.
d) $\frac{1}{4}$.
e) $\frac{1}{2}$.

○ **46. (UFRGS)** Um jogo consiste em responder corretamente as perguntas sorteadas, ao girar um ponteiro sobre uma roleta numerada de 1 a 10 no sentido horário. O número no qual o ponteiro parar corresponde à pergunta a ser respondida. A cada número corresponde somente uma pergunta, e cada pergunta só pode ser sorteada uma vez. Caso o ponteiro pare sobre um número que já foi sorteado, o participante deve responder a próxima pergunta não sorteada, no sentido horário. Em um jogo, já foram sorteadas as perguntas 1, 2, 3, 5, 6, 7 e 10. Assim, a probabilidade de que a pergunta 4 seja a próxima a ser respondida é de:

a) $\frac{1}{4}$.

b) $\frac{1}{3}$.

c) $\frac{1}{2}$.

d) $\frac{2}{3}$.

e) $\frac{3}{4}$.

○ **47. (UFRGS)** No jogo de xadrez, cada jogador movimenta as peças de uma cor: brancas ou pretas. Cada jogador dispõe de oito peões, duas torres, dois cavalos, dois bispos, um rei e uma rainha. Escolhendo ao acaso duas peças pretas, a probabilidade de escolher dois peões é de:

a) $\frac{7}{30}$.

b) $\frac{7}{20}$.

c) $\frac{7}{15}$.

d) $\frac{14}{15}$.

e) $\frac{14}{9}$.

○ **48. (UFRGS)** O resultado de uma partida de futebol foi 3x2. A probabilidade de que o time vencedor tenha marcado os dois primeiros gols é:

a) 15%.
b) 20%.
c) 30%.
d) 40%.
e) 45%.

○ **49. (UFRGS)** Para a disputa da Copa do Mundo de 2014, as 32 seleções que se classificarem serão divididas em 8 grupos, os quais serão constituídos de 4 seleções cada um. Nos jogos da primeira fase, cada seleção jogará com todas as outras seleções do seu grupo. Uma empresa adquiriu um ingresso para cada jogo da primeira fase do mesmo grupo. Ao sortear dois ingressos entre seus funcionários, a probabilidade de que esses ingressos envolvam uma mesma seleção é:

a) 20%.
b) 25%.
c) 50%.
d) 80%.
e) 85%

○ **50. (UFRGS)** Considere dois dados, cada um deles com seis faces, numeradas de 1 a 6. Se os dados são lançados ao acaso, a probabilidade de que a soma dos números sorteados seja 5 é:

a) $\frac{1}{15}$

b) $\frac{2}{21}$

c) $\frac{1}{12}$

d) $\frac{1}{11}$

e) $\frac{1}{9}$

○ **51. (UFRGS)** Em uma maternidade, aguarda-se o nascimento de três bebês. Se a probabilidade de que cada bebê seja menino é igual à probabilidade de que cada bebê seja menina, a probabilidade de que os três bebês sejam do mesmo sexo é:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{6}$

e) $\frac{1}{8}$

○ **52. (UFRGS)** Em um jogo, dentre dez fichas numeradas com números distintos de 1 a 10, duas fichas são distribuídas ao jogador, que ganhará um prêmio se tiver recebido fichas com dois números consecutivos. A probabilidade de ganhar o prêmio nesse jogo é de:

a) 14%
b) 16%
c) 20%
d) 25%
e) 33%

◯ **53. (UFRGS)** Dois dados perfeitos numerados de 1 a 6 são jogados simultaneamente. Multiplicam-se os números sorteados. A probabilidade de que o produto seja par é:

a) 25%
b) 33%
c) 50%
d) 66%
e) 75%

◯ **54. (UFRGS)** Em uma gaveta, cinco pares diferentes de meias estão misturados. Retirando-se ao acaso duas meias, a probabilidade de que elas sejam do mesmo par é de:

a) $\frac{1}{10}$
b) $\frac{1}{9}$
c) $\frac{1}{5}$
d) $\frac{2}{5}$
e) $\frac{1}{2}$

◯ **55. (UFRGS)** Um número natural N de três algarismos, menor que 500, é escolhido ao acaso. A probabilidade de que $\log_2 N$ seja um número natural é:

a) 0,001
b) 0,005
c) 0,01
d) 0,05
e) 0,1

◯ **56. (UFRGS)** Uma pessoa tem, em sua carteira, oito notas de R$ 1,00, cinco notas de R$ 2,00 e uma nota de R$ 5,00. Se ela retirar ao acaso três notas da carteira, a probabilidade de que as três notas retiradas sejam de R$ 1,00 está entre:

a) 15% e 16%.
b) 16% e 17%.
c) 17% e 18%.
d) 18% e 19%.
e) 19% e 20%.

◯ **57. (UFRGS)** Inteiramente ao acaso, 14 alunos dividiram-se em 3 grupos de estudos. O primeiro, para estudar Matemática, o segundo, Física, e o terceiro, Química. Se, em cada um dos grupos, há pelo menos 4 alunos, a probabilidade de haver exatamente 5 alunos no grupo que estuda Matemática é de:

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{3}{4}$
d) $\frac{5}{6}$
e) 1

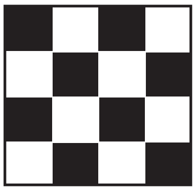
◯ **58. (UFRGS)** Dentre um grupo formado por dois homens e quatro mulheres, três pessoas são escolhidas ao acaso. A probabilidade de que sejam escolhidos um homem e duas mulheres é de:

a) 25%
b) 30%
c) 33%
d) 50%
e) 60%

◯ **59. (UFRGS)** Deseja-se construir um triângulo com os vértices sobre vértices de um octógono regular. A probabilidade de que sejam usadas somente diagonais e nenhum dos lados do octógono é:

a) $\frac{2}{21}$
b) $\frac{7}{40}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{2}{7}$
e) $\frac{1}{3}$

◯ **60. (UFRGS)** Considere o tabuleiro de 16 casas, com 8 casas brancas e 8 casas pretas, representado na figura abaixo.



Três peças serão dispostas ao acaso sobre o tabuleiro, cada uma delas dentro de uma casa, ocupando, assim, três casas distintas.

A probabilidade de que as três peças venham a ocupar três casas de mesma cor é:

a) $\frac{1}{10}$

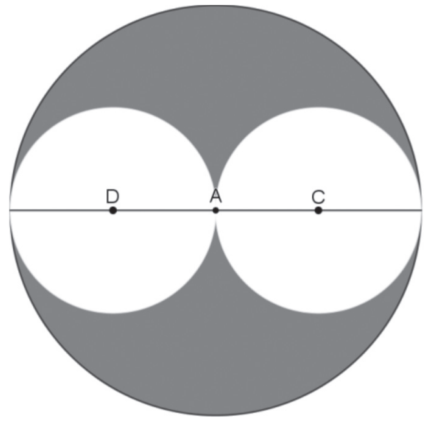
b) $\frac{1}{5}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{3}$

e) $\frac{1}{2}$

◯ **61. (UFRGS)** Considere o alvo mostrado na figura a seguir, construído com três circunferências tangentes duas a duas, com DA = AC = 10 e os pontos D, A e C colineares.



Um dardo é lançado e atinge o alvo. A probabilidade de o dardo atingir a região sombreada é de:

a) $\frac{1}{5}$.

b) $\frac{1}{4}$.

c) $\frac{1}{3}$.

d) $\frac{1}{2}$.

e) $\frac{2}{3}$.

Anotações:

GABARITO

• Habilidades à prova

Unidade 1

1. D	**14.** D	**27.** E	**40.** E
2. D	**15.** D	**28.** B	**41.** C
3. C	**16.** A	**29.** D	**42.** B
4. D	**17.** D	**30.** B	**43.** E
5. B	**18.** D	**31.** D	**44.** D
6. C	**19.** B	**32.** B	**45.** E
7. D	**20.** D	**33.** D	**46.** B
8. E	**21.** D	**34.** E	**47.** E
9. B	**22.** D	**35.** B	**48.** C
10. C	**23.** B	**36.** D	**49.** C
11. E	**24.** C	**37.** E	**50.** C
12. D	**25.** D	**38.** D	
13. D	**26.** A	**39.** B	

Unidade 2

1. C	**18.** D	**35.** C	**52.** E
2. B	**19.** D	**36.** D	**53.** D
3. E	**20.** D	**37.** B	**54.** C
4. E	**21.** D	**38.** C	**55.** B
5. A	**22.** B	**39.** E	**56.** B
6. D	**23.** C	**40.** C	**57.** B
7. C	**24.** A	**41.** A	**58.** B
8. B	**25.** E	**42.** B	**59.** C
9. E	**26.** C	**43.** A	**60.** B
10. C	**27.** A	**44.** E	**61.** B
11. B	**28.** D	**45.** D	**62.** B
12. A	**29.** A	**46.** A	**63.** C
13. A	**30.** B	**47.** B	**64.** E
14. A	**31.** B	**48.** D	**65.** B
15. D	**32.** A	**49.** B	
16. C	**33.** C	**50.** C	
17. A	**34.** A	**51.** B	

Unidade 3

1. E	**16.** B	**31.** C	**46.** E
2. E	**17.** B	**32.** E	**47.** C
3. C	**18.** C	**33.** E	**48.** A
4. A	**19.** E	**34.** D	**49.** D
5. D	**20.** A	**35.** B	**50.** E
6. B	**21.** D	**36.** D	**51.** B
7. A	**22.** C	**37.** C	**52.** C
8. B	**23.** E	**38.** B	**53.** E
9. B	**24.** A	**39.** D	**54.** B
10. D	**25.** C	**40.** D	**55.** B
11. A	**26.** E	**41.** B	**56.** B
12. B	**27.** D	**42.** E	**57.** E
13. D	**28.** E	**43.** E	**58.** D
14. B	**29.** E	**44.** B	
15. A	**30.** A	**45.** D	

Unidade 4

1. D	**17.** A	**33.** C	**49.** D
2. D	**18.** D	**34.** B	**50.** E
3. E	**19.** E	**35.** D	**51.** C
4. D	**20.** E	**36.** D	**52.** C
5. A	**21.** B	**37.** E	**53.** E
6. A	**22.** C	**38.** E	**54.** B
7. B	**23.** C	**39.** A	**55.** A
8. D	**24.** E	**40.** C	**56.** A
9. E	**25.** B	**41.** A	**57.** A
10. C	**26.** A	**42.** E	**58.** E
11. C	**27.** C	**43.** C	**59.** D
12. C	**28.** D	**44.** E	**60.** B
13. D	**29.** E	**45.** E	**61.** D
14. E	**30.** C	**46.** C	
15. B	**31.** D	**47.** A	
16. C	**32.** B	**48.** C	